

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

PEDRO HENRIQUE PINHEIRO CINTRA

FÍSICA E DETECÇÃO DE NEUTRINOS DE SUPERNOVAS

BRASÍLIA

25 DE OUTUBRO DE 2020

Pedro Henrique Pinheiro Cintra

Física e Detecção de Neutrinos de Supernovas

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Clóvis Achy Soares Maia

Coorientador: Ernesto Kemp

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

25 de outubro de 2020

Pedro Henrique Pinheiro Cintra

Física e Detecção de Neutrinos de Supernovas/ **Pedro Henrique Pinheiro Cintra. – Brasília, 25 de outubro de 2020-**

207 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Clóvis Achy Soares Maia

Monografia – Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física, **25 de outubro de 2020.**

1. Neutrinos. 2. Detecção. I. Orientador. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física

CDU 02:141:005.7

Pedro Henrique Pinheiro Cintra

Física e Detecção de Neutrinos de Supernovas

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. **Brasília, 25 de outubro de 2020:**

Clóvis Achy Soares Maia
Orientador
Clóvis Achy Soares Maia

Clóvis Achy Soares Maia
Coorientador
Ernesto Kemp

Professora
Mariana Penna Lima

Professor
Bernardo de Assunção Mello

Brasília
25 de outubro de 2020

*Posso pressentir o perigo e o caos
E ninguém agora vai me amedrontar
Com a minha mente vou a mil lugares
E a imaginação me dá forças pra voar*

*Sonhos desejamos alcançar
Ser alguém com um poder maior que você já tem*

*Liberdade é correr pelos céus
Sempre unidos vamos triunfar
Se a nossa luta é pra valer
Vou mostrar meu valor
Dragonball Z
Meu compromisso é sempre
Vencer*

*Liberdade nova era vai chegar
Energia tenho para usar
E com alegria de viver
Ninguém vai me deter
Dragonball Z
Meu compromisso é sempre
Vencer*

Agradecimentos

Este trabalho representa o fim de uma jornada marcante em minha vida. Durante estes 5 anos de graduação, muito sobre minhas concepções, opiniões, prioridades e sobre meu conhecimento foi alterado pelo ambiente em que vivi, os amigos que conheci e as matérias que estudei. Por isso, é muito difícil decidir como iniciar e ordenar estes agradecimentos, há tanta coisa e tantas pessoas nas quais eu devo agradecer (talvez algumas delas nem sequer saibam disso), mas para fins de simplicidade, irei começar pela ordem cronológica (o que também significa que este texto ficará enorme).

A começar pela minha mãe Sandra, meu pai Ricardo e meu irmão Antônio. Minha grande sorte na vida já se inicia aqui, onde eu fui apresentado com uma família presente e apoiadora, meus pais que mesmo apesar da sua separação, não deixaram de querer se manter presentes nas vidas dos filhos. Ao meu irmão, que desde quando éramos pequenos e ele me carregava dentro de um balde de Lego pela casa, ou brigava comigo por jogar seu carrinho de brinquedo pela janela, para ver o que aconteceria (sempre fui um cientista experimental), sempre teve um espírito brincalhão e sempre demonstrou apoio em quase tudo o que eu fazia (quando isso não envolvia destruição de algum bem material da casa). Até hoje, meu irmão continua a se manter brincalhão, cheio de piadas ruins, e sem dúvida devo agradecer-lo por isso, pois parte de meu jeito de ver o mundo e encarar tarefas, sem dúvida veio da convivência com ele. Aos meus pais, há muito no qual agradecer, mas dou destaque para as diferenças. Meu pai, um cético religioso e minha mãe, uma devota católica. Juntos, me promoveram um ambiente de crescimento sem ideias extremas, sempre tive contato com "os dois lados da moeda" graças às diferenças ideológicas dos dois. Mas não só isso, minha mãe sempre procurou cuidar de minha saúde, da forma mais ditatorial e incisiva que as mães fazem (é brincadeira mãe) e meu pai, sempre buscando me dar a diversão da forma mais incosequente que os pais fazem (é brincadeira também pai). Lembro de todos os pequenos incentivos que meu pai me fornecia, sempre que eu aparecia com uma ideia maluca de construir uma casa de caixa de sapato para meu ursinho pooh (e até hoje, quando decido comprar uma roupa de homem aranha na internet e um chapéu russo para o frio). Sem dúvidas, meu pai é um grande patrocinador de minha criatividade. Minha mãe, que sempre me trouxe o olhar caridoso da igreja, que mesmo não seguindo sua crença e sua religião, moldou uma parte de minha visão para com os outros. Hoje, sinto enorme prazer em ajudar um amigo, e ver seu sorriso de volta, e com certeza devo parte deste sentimento à educação religiosa de minha mãe.

Junto a eles, eu agradeço aos meus primos e tias, Deco, Daniel, Rafael, Artur, Ana, Matias, Bagi, Bibi, João, Marcela, Irene, Bruna, Macedo, tia Aninha, tia Lila, tia Mana, tio Tico, tio Gustavo e tio João por toda a união e proveito que me proporcionaram quase todos os anos em Tamandaré. Aos meus primos, fico especialmente grato por me darem sempre apoio e

se manterem sempre próximos de mim e uns dos outros.



Agradeço a minha amiga de infância, Lorena Batista, que também sempre foi uma grande portadora de piadas e caretas, mantendo a alegria e descontração em todos os ambientes em que estava.

Aos amigos que fiz durante a escola, Humberto, Pedro Costa, Bernardo, Patrick, Leo, Isadora, Bruna, Tati, Gabi, Lolis, Rafa, Henrique, Lucas, Giovanni, Carol, Benny, Lica e tantos outros. Mesmo não mantendo o contato com muitos destes amigos, não possuo motivo para não agradecer-los por compartilharem comigo, a jornada de crescimento e aprendizado durante minha infância e adolescência. Um agradecimento especial deve ser feito ao Rafa, amigo que tenho a 18 anos (ou seriam 19?) e que compartilhou comigo brigas, risadas, conselhos, bebidas

e tristezas. Desejo a ti, todo o poder que a força pode conceder, meu nobre amigo. Juntamente ao Rafa, agradeço à Tati, talvez a amiga menos extrovertida dentre as meninas que eram parte do meu grupo de amigos no ensino médio, mas que sempre foi sincera e engraçada, e até hoje me traz um grande prazer conversar contigo (mesmo que apenas por chamada de vídeo, bactéria filha da p**a, micróbio do c****o (quem pegou a referência, pegou, quem não pegou continua lendo)). Henrique, o grande sábio inconsequente do grupo, que sempre surpreende as conversas com alguma história ou frase de efeito que nos faz rir até a barriga doer. Para ti, eu desejo sucesso e sabedoria o suficiente para escolher seu caminho após a universidade. Lucas, nosso grande conhecedor da tecnologia, sempre por dentro dos lançamentos mais atuais e um homem de moral inabalável. Um rapaz disposto sempre a oferecer conselhos, um rapaz racional e que frequentemente traz para as discussões e conversas o outro lado da história. A ti, ó mantedor do equilíbrio ético, lhe desejo um cruzador estelar de alegria e torço para que sua carreira te deixe cada vez mais em contato com sua paixão¹.



Cadu, Anna, Claudia, Maju e Mayara, vocês realmente são pessoas adoráveis e muito boas de se conviver. Cadu, meu meio-irmão, você é um piadista natural e um jovem extremamente determinado em seus objetivos, espero ter adquirido parte desta determinação em todos estes anos de convivência. Anna, uma pessoa sincera e madura, fico muito feliz com a intimidade que temos para contar as mais diversas histórias do dia-a-dia, sempre dou boas risadas do seu jeito meio doido e empolgado de ser. Cláudia, uma mãe protetora de seus filhos, e uma grande possuidora de piadas ruins (mas que fazem rir), agradeço a ti pelo acolhimento e espero que sinta muito orgulho de seus filhos ao ver eles crescerem herdando tantos dos seus dons. Maju e Mayara, minhas duas cunhadas, cada uma especial em seu jeito. Maju, sonhadora,

¹ Estes agradecimentos estão ficando muito longos, mas como eu disse no início, há muito no qual agradecer (e olha, eu to tentando resumir as coisas, juro).

empreendedora e focada. Mayara, habilidosa, cuidadora e mantedora do equilíbrio no casal (obrigado por controlar o jeito insistente do meu irmão, quando necessário).

Chegamos enfim, ao meu período na universidade. E aqui é onde se concentram a maior parte dos agradecimentos. Em primeiro lugar, eu devo agradecer à própria Universidade de Brasília, um ambiente rico, plural e extremamente acolhedor (para mim, pelo menos). Sem conviver por 5 anos em um ambiente tão rico de pessoas diversas, com espiritualidades, sexualidades e opiniões diversas, meu desenvolvimento como um cientista seria, sem dúvida, mais pobre. Foi nesta universidade, onde eu tive a chance de acumular o máximo de conhecimento sobre os mais diversos assuntos em toda a minha vida, desde as matérias que fiz em meu curso, até as matérias optativas que fiz na biologia, psicologia, geologia, educação física e outras.

Ainda na universidade, venho agradecer aos amigos que fiz. Desde o primeiro semestre, ao Lucas, Serejo, João Augusto, Raíssa e Zé, que foram a força motriz por trás de minha persistência em não desistir do curso, até os amigos que fiz durante o resto do percurso, Vavá, Igor, Felipe, Batata, Ranier, Vitor, Caio, Borraxa, Vini, Paulinho, Luísa, Miguel, Michella, Olga, Mari, Lud, Carol, Alice, Linda, Milena, Israel, Cassiano e Garcia, sem vocês eu não estaria aqui nesta última etapa deste curso. Lucas, você é a pessoa mais determinada e resiliente que conheci, além de ser um jovem portador de uma filosofia de vida extremamente bonita. Serejo e Zé, meus grandes amigos de primeiro e segundo semestre, a vocês eu devo muito de minha persistência no curso. João, as voltas para casa com nossas paradas na pizzaria sem a menor sombra de dúvidas foram os momentos de descontração que eu mais precisava no dia-a-dia, todos aqueles dias de estudo se tornavam muito mais leves diante de uma parada na pizzaria, com um suco de laranja e um papo filosófico sobre a humanidade. Raíssa, a ti não há palavras para agradecer o suficiente, mesmo que nosso namoro tenha acabado, sinto me um jovem de muita sorte por ter te tido em minha vida de forma tão próxima, guardo nossa amizade com muito carinho. Vavá, sem você, eu nunca aprenderia o mínimo de programação necessário para este trabalho, e mais, devo agradecer parte do código deste trabalho, diretamente a ti. Tu foi o melhor amigo que eu poderia ter, e mais do que poderia merecer neste curso. Para expressar meus mais sinceros agradecimentos para tu, deixo aqui está foto 100% verídica:



Igor, um rapaz espontâneo e gentil, inteligente e empolgado, a sua empolgação para com as conquistas alheias fornece a todos a sua volta o combustível necessário para se manter em frente. Sou grato por ter me aproximado de ti. Felipe, o físico mais inteligente que conheci, obrigado por todos os ensinamentos e a paciência em todos esses anos. Trabalhar contigo durante os meses iniciais da pandemia foi uma enorme honra e nosso artigo juntos é e será por muito tempo meu maior orgulho acadêmico. Batata, uma pessoa singular e sem muitas barreiras sociais, amo seu jeito inocente (as vezes) de fazer amigos e seu carinho é sempre muito bem vindo, agradeço muito por todas as broncas que tu me deu sempre que eu priorizei o estudo à minha saúde. Ranier, nosso homem das selvas, você é um físico de alto nível, com uma proatividade para ensinar os outros muito rara. Agradeço por todas as risadas que me provocou e, assim como o Felipe, por todas as contas que me ajudou. Vitor, assim como com o João, você sempre alegrou minhas voltas para casa após os estudos, nosso bonde guaraense será eternamente guardado com carinho. Caio e Borraxa, a briga amorosa de vocês é um marco único e agradeço muito a ambos por me fazerem rir. Paulo, não há palavras para descrever o tamanho do seu coração, fico profundamente contente por ver seu caminho sendo trilhado naquilo que te mais atrai. Luísa, assim como a Tati, sempre aparecendo com histórias engraçadas, fico verdadeiramente agradecido por compartilhar conversas com você. Migueeeel (quem conhece o Miguel, vai ter lido isso com a voz que ele faz quando vê alguém), todos os nossos assuntos profundos sobre os amores do dia-a-dia (famosas crushs) e sua visão de mundo sobre a ciência me trouxeram muito conforto e aprendizado, fico contente em termos compartilhado tantas crushs e tantas risadas em voltas para casa. Michella, apesar de não ser da física, é tão próxima de mim que as vezes esqueço que não é, obrigado por todas as noites de conversas e desabafo que tivemos, te carrego no peito com muito carinho e afeto. Olga, sempre fofa e bondosa com os outros, conversar contigo e te ouvir falando sobre qualquer coisa é sempre prazeroso. Mari, sempre fico impressionado em como você consegue se superar em ser uma amiga presente (mesmo que só responda minhas mensagens uma vez a cada 3 semanas), adoro conversar contigo e compartilhar histórias sem nexos e descontraídas. Lud, quem diria que inicialmente alguém que era conhecida por mim apenas como "a namorada do Felipe" se tornaria um membro tão vital no meu cotidiano, que sempre traz lucidez e alegria para aqueles a sua volta, obrigado por sua presença e pelas artes que faz (que nunca deixam a desejar). Carol, a minha mãe na faculdade, cuidando dos amigos como uma coruja protege a cria, meu coração se alegra sempre que vê seu sorrisinho inocente dando "bom dia". Linda e Milena, as duas eu conheci em cursos de física fora de Brasília e uma amizade que poderia ser apenas de alguns dias durante um curso, perdurou por muito tempo e me trouxe muitos prazeres e conversas agradáveis. Israel, apesar de não nos falarmos com tanta frequência hoje, me lembro sempre de sua insistência para que eu aceitasse que programação era legal, agradeço muito sua insistência, pois tenho certeza que ela teve seu impacto em meu aprendizado na programação. E a todos os meus demais amigos, agradeço a cada um de vocês, os momentos que compartilhei. Sem os amigos que fiz, eu não chegaria aonde cheguei neste curso.



Antes de chegar aos meus professores e orientadores da física, faço um desvio para a psicologia para agradecer ao Rui, meu orientador de iniciação científica, que acolheu um jovem aluno de física curioso para aprender e pesquisar sobre temas relacionados à cognição humana. Seu bom humor e profissionalismo me forneceram visão e ensinamentos sobre outras áreas da ciência como ninguém.

Não menos importante, meus professores, tanto os bons quanto os ruins, que moldaram minha forma de ver o ensino de física. Em especial, ao Júnio que traz consigo um sorriso e uma boa vontade que são raras de se encontrar em professores universitários. Ao Roncaratti, meu primeiro orientador de iniciação científica, que me acolheu em seu laboratório e me proporcionou experiências das mais diversas. Ao Olavo, que chegou muito perto de me fazer desistir do curso no primeiro semestre, porém mais tarde se mostrou um professor muito bom e sincero. À

Vanessa, pela paciência com um jovem calouro e por consolar minha turma com carinho todas as segundas e quartas, após as aulas do Olavo, com certeza seu apoio também foi essencial para minha continuidade no curso. Ao Pedroza, que lecionou a matéria do curso que eu mais gostei, mecânica quântica B, e que abriu os braços para tirar dúvidas de um aluno que frequentemente dormia nas aulas. E ao Marco César, por todas as conversas que compartilhamos fora das aulas, sobre a carreira científica e sobre o futuro da ciência. A todos vocês, eu espero que a felicidade esteja constantemente convosco. Apenas gostaria de ver uma maior união e interação entre vocês, assim como os demais professores deste instituto.

E claro, mais recentemente, agradecer ao Ranier, Felipe, Igor e Vavá por entrarem comigo no curso de *Deep Learning*, ministrado pelo professor Clécio do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Se não tivessem me convencido a entrar neste curso, eu não possuiria as habilidades necessárias para entrar no emprego que consegui. E ainda, agradeço a Ana Paula, por ter recomendado para uma vaga de emprego um jovem físico que simplesmente a ajudou a entender algumas equações em um modelo computacional.

Por último, agradecer aos meus dois orientadores, Clóvis Maia e Ernesto Kemp, que me guiaram durante este trabalho. Clóvis, todas as nossas conversas em sua sala sobre física, política, ficção científica, dominação mundial e os mais diversos assuntos me trouxeram ânimo para me dedicar ao projeto, fico profundamente agradecido por ter aceitado me orientar neste trabalho. Ernesto, agradeço muito por toda a paciência em tirar minhas dúvidas e estar aberto a discutir os métodos computacionais para elaboração da simulação tratada neste trabalho.



Como disse no início, este trabalho é o marco de um período de alto impacto em minha

formação profissional e pessoal. Além do mencionado aqui, gostaria de agradecer a todos os demais fatores que me empurraram neste caminho, mesmo que eu não os reconheça agora ou lembre. E ainda, gostaria de agradecer ao Pedro Cintra do passado, por ter escolhido este fascinante tema de trabalho, que me proporcionou muito prazer em escreve-lo. Além disso, gostaria de desejar ao Pedro Cintra do futuro uma boa sorte em sua apresentação. Tenho muito orgulho do trabalho que fiz e espero verdadeiramente que ele esteja nos melhores padrões (talvez não em português, sempre meu ponto fraco hehehehe). Amo a todos os meus familiares e amigos, cada um do seu jeito.

*"Na história da humanidade e dos animais,
aqueles que aprenderam a cooperar de forma mais eficiente prevaleceram."
(Charles Darwin)*

Resumo

Neste trabalho, elaboramos uma revisão teórica sobre a física por trás dos neutrinos e preparamos uma simulação experimental de detecção de neutrinos provenientes de supernovas no Deep Underground Neutrino Detector (DUNE). A partir do estudo de diversas fontes bibliográficas, montamos um avanço gradual no desenvolvimento da teoria até iniciarmos a descrição das interações fundamentais. O experimento é descrito de acordo com as informações técnicas e oficiais fornecidas pelo Long Baseline Neutrino Facility (LBNF) que é responsável pela construção e manutenção do DUNE. Por fim, construímos uma simulação computacional, para concluir a revisão abrangendo aspectos teóricos e experimentais. Durante o trabalho, exploramos todos os aspectos do método científico, desde a hipótese teórica, passando pelo desenvolvimento da teoria em cima de observações, chegando na validação experimental da teoria desenvolvida e sua aplicação em outras áreas da ciência, permitindo a construção de uma nova janela de observação experimental para eventos astrofísicos.

Palavras-chaves: neutrinos. física de partículas. DUNE. teoria quântica de campos.

Lista de ilustrações

	32figure.caption.16	
Figura 4	– Representação simples de um férmion de carga $Q = -1$ se propagando para a direita e um anti-férmion de carga $Q = +1$ se propagando na mesma direção.	62
Figura 5	– Diagrama de um dos possíveis canais de interação para o espalhamento elétron-elétron.	76
Figura 6	– Processo de espalhamento elétron-pósitron.	77
Figura 7	– Interações entre os bósons	91
Figura 8	– Potencial de Higgs em termos do valor de $ \Phi(x) $.	93
Figura 9	– Representação dos campos leptônicos e sua interação com o campo de Higgs. A esquerda (9a) representamos um campo leptônico e o campo de Higgs no estado de vácuo, o campo de Higgs possui valor médio $\langle 0 \Phi(x) 0 \rangle \neq 0$, portanto, escolhemos representa-lo em cima (podemos pensar no eixo vertical como sendo o valor médio do campo) e o campo leptônico embaixo, em seu estado fundamental de $\langle 0 \Psi(x) 0 \rangle = 0$. Na direita (9b), representamos agora a criação de um lépton, sendo ilustrado por um pacote de onda centrado na posição da criação do mesmo. A partícula é "arrastada" no campo de Higgs, adquirindo sua massa ao interagir com este campo.	96
Figura 10	– Observação da produção do bóson de Higgs no decaimento difóton. À esquerda a soma de 25 sinais diferentes nos eventos realizados a 7 e 8 TeV. As margens de 1 e 2σ representam a margem de erro do <i>background</i> . A pequena saliência similar a um morro na contagem de eventos representa o pico de ressonância do bóson de Higgs, perto do valor da massa deste bóson. O gráfico inferior representa o resíduo das medidas após a remoção do <i>background</i> . Na direita, está ilustrado o espectro de massa do evento, com um pico em 124.70 ± 0.34 GeV, permitindo a identificação da massa do bóson de Higgs. Imagem retirada de (KHACHATRYAN et al., 2014).	97
Figura 11	– Espalhamento elástico de um neutrino com um elétron via corrente neutra.	101
Figura 12	– Espalhamento elástico de um neutrino com um elétron via corrente carregada.	102
Figura 13	– Seção de choque do espalhamento elástico neutrino-elétron em função de $\cos(\theta)$.	104
Figura 14	– Seção de choque do espalhamento elástico neutrino-elétron em função da energia E_ν . Em vermelho, as curvas indicam a seção de choque de detecção do Super-Kamiokande, em verde as curvas indicam a seção de choque do processo na natureza.	105

Figura 15 – Decaimento beta considerando o nêutron e o próton como férmions de Dirac fundamentais.	106
Figura 16 – Taxa de decaimento em função da energia do elétron emitido.	109
Figura 17 – Diagrama de Feynman para o decaimento beta levando em consideração a estrutura interna do nêutron e do próton.	110
Figura 18 – Geração de férmions pela aniquilação $e^- + e^+$ mediada por um bóson neutro Z^0	111
Figura 19 – Seção de choque dos processos I) $e^+ + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + \nu_e$ (azul) e II) $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ (vermelho) perto da energia de repouso do bóson Z^0 . A curva tracejada verde é a seção de choque total do processo I levando em consideração também a mediação por fótons onde sua seção de choque é calculada em (GRIFFITHS, 2008).	114
Figura 20 – Imagem capturada da nebulosa de Órion pelo telescópio espacial Hubble em 2006. A imagem foi produzida através da detecção em diversas frequências do espectro eletromagnético, dentro e fora da região do visível.	120
Figura 23 – Alteração da energia média de emissão em termos dos parâmetros da função. Na esquerda, esta relação está evidenciada em termos da temperatura. Na direita, a relação está em termos de α para Otroshchenko e η para Janka. Em ambos os gráficos, o outro parâmetro fixo foi aquele encontrado pelo ajuste com os dados computacionais.	131
Figura 24 – Esquema do experimento e as instalações responsáveis pela produção e detecção do feixe de neutrinos (ABI et al., 2018).	135
Figura 25 – Representação da disposição de placas de anodos (azul) e cátodos (vermelho) dentro do LArTPC, os detectores de fótons são dispostos entre as placas, imersos no líquido para o desing single-phase (ABI et al., 2018).	136
Figura 26 – Seção de choque em função da energia do neutrino para as interações mais relevantes na detecção de neutrinos de supernova. Retirada de (SCHOLBERG, 2012).	138
Figura 27 – Variação da energia média de emissão de neutrinos em termos de T e η	142
Figura 28 – Possíveis valores de T e η dada a variação de energia média na detecção da supernova 1987a. A região escurecida após $T = 30$ MeV representa a região de parâmetros não realísticos devido ao limite de 30 MeV observado para simulações numéricas. O par escolhido foi $T = 20$ MeV e $\eta = 12$. A região colorida contém os pares de T e η dentro do limite de 8 a 28.4 MeV.	143
Figura 29 – Espectro de neutrinos detectado pelo detector Super Kamiokande em 1987.	144

Figura 30 – Variação do numero total de neutrinos detectados, para uma distância fixa de 50 kpc. Nas figuras 30a e 30b as regiões em branco estão fora da região realística para as duas situações, na figura 30a, os valores que resultassem em um numero negativo de eventos (devido à aproximação polinomial da seção de choque do argônio) foram excluídos. Enquanto que, para a figura 30b, os valores de parâmetros que resultavam em uma quantidade de eventos acima de 10000 também foi excluída. Na parte inferior, 30c, computamos esta variação com T fixo em 20 MeV.	145
Figura 31 – Representação esquemática por trás da etapa 2 de flutuação estatística, cada neutrino incidente pode ser imaginado como possuindo, associado a si, uma distribuição gaussiana para sua energia. O centro da gaussiana é o valor real da energia do neutrino, que também é o valor mais provável de ser detectado, entretanto para cada energia, uma certa largura também esta associada à resolução do detector, representando a possível variação na inferência da energia pelo DUNE.	147
Figura 32 – Representação esquemática do algoritmo por trás do ABC-SMC. Na realidade, são sorteados valores específicos, e não distribuições finas como as mostradas nas caixas de θ_1 até θ_n , a escolha dessa representação foi puramente visando facilitar a visualização. Entretanto, esta representação pode se tornar válida a partir da segunda repetição, uma vez que os valores sorteados agora trazem consigo um leve ruído, que pode ser representado pela fina gaussiana.	149
Figura 33 – Espectro de emissão de neutrinos simulado para a supernova em questão, $E_{tot} = 10^{53}$ ergs, $T = 20$ MeV, $\eta = 12$	152
Figura 34 – Figura 34a, comparação, em escala logarítmica, do espectro de detecção e o espectro de emissão da supernova. Nota-se que o espectro de detecção possui uma queda mais abrupta para a região de poucos MeV devido à queda na eficiência de detecção. Figura 34b, comparação, do espectro de detecção e o espectro de emissão da supernova normalizados.	152
Figura 35 – Histograma de detecção após a primeira flutuação estatística dada pelo numero de eventos sorteados pela distribuição de Poisson (35a) e após a segunda flutuação estatística com o sorteio dentro da distribuição gaussiana (35b). Note que na figura 35b o espectro de detecção esperado e o histograma de detecção real já estão ambos normalizados.	153
Figura 36 – Distribuições posteriores para ambos os parâmetros. Na figura 36c podemos observar o espaço de parâmetros que foi aceito dentro do ajuste ABC-SMC.	154

Figura 37 – Mapa de cores do erro RMSD em função dos parâmetros T e η . O melhor par, sendo aqueles que minimizaram a distância, foi dado por $T = 20.02$ e $\eta = 19.45$, sendo que o valor real (ponto laranja) se encontra próximo e dentro da margem de confiança dada pelas duas distribuições individualmente.	155
Figura 38 – Análise estatística da semelhança entre o histograma de detecção e a distribuição de probabilidade de detecção dada pela equação de detecção ajustada com os valores de T e η dentro dos valores aceitos pelo ajuste ABC-SMC.	156
Figura 39 – Distribuição final de possíveis valores de D que ajustam o valor da integral do espectro detectado dentro da tolerância final de	157
Figura 40 – Relação entre a energia média de neutrinos emitida pela supernova (eixo x) e a energia média detectada (eixo y) para diferentes valores de T e η	158
Figura 41 – Todas as interações que podem ser interpretadas do mesmo vértice fundamental da QED.	182
Figura 42 – Relação de Einstein para uma dada massa específica m_e . A curva azul representa as partículas que podem existir e possuem momento e energia obedecendo à relação de Einstein.	183
Figura 43 – Distribuições cumulativas a serem comparadas pelo teste KS. O teste utiliza o maior valor de distância entre as distribuições como métrica de similaridade entre as duas.	193

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores de hipercarga fraca	85
Tabela 2 – Valores de g_1 e g_2 para os diferentes sabores de neutrinos	102
Tabela 3 – Valores de C_V e C_A para diferentes férmions.	112
Tabela 4 – Parâmetros adotados para o ajuste dos dados de detecção com a curva de detecção esperada, utilizando o ABC-SMC.	153
Tabela 5 – Parâmetros adotados para o ajuste da distância até a supernova, utilizando o ABC-SMC.	156

Lista de abreviaturas e siglas

DUNE	Deep Underground Neutrino Experiment
CERN	European Organization for Nuclear Research
SURF	Sanford Underground Research Facility
LArTPC	Liquid Argon Time-Projection Chamber
LBNF	Long Baseline Neutrino Facility
TQC	Teoria Quântica de Campos
EUA	Estados Unidos da América
UnB	Universidade de Brasília
GRB	Gamma Ray Burst
SNEWS	SuperNova Early Warning System
QED	Eletrodinâmica Quântica
KS	Kolmogorov-Smirnov

Sumário

	Introdução	31
I	FÍSICA DE PARTÍCULAS E NEUTRINOS	35
1	TEORIA DE GRUPOS	37
1.1	Álgebra de Lie	37
1.2	Álgebra de Lorentz	39
1.3	Representação de Campos	42
1.4	Álgebra de Poincaré	46
2	TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	49
2.1	Campo de Dirac Clássico	49
2.2	Soluções do Campo de Dirac	52
3	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	57
3.1	Processo de Quantização	57
3.2	Partículas e Anti-Partículas	59
3.3	Simetrias C,P	62
4	INTERAÇÕES	65
4.1	Matriz-S	65
4.2	Redução LSZ	66
4.3	Expansão perturbativa e o propagador de Feynman	69
4.4	Diagramas de Feynman	74
5	INTERAÇÕES ELETROFRACAS	79
5.1	Teoria de Calibre	79
5.1.1	Desenvolvimento da QED	80
5.2	Quebra Espontânea de Simetria	91
5.3	A Lagrangiana Eletrofraca Padrão	97
6	INTERAÇÕES DE NEUTRINOS	101
6.1	Espalhamento neutrino elétron	101
6.2	Decaimento beta	105
6.3	Medição do número de famílias interagentes de neutrinos	111
6.4	Absorção do neutrino pelo argônio	114

II	SUPERNOVAS	117
7	SUPERNOVAS	119
7.1	O ciclo de vida estelar	119
7.2	O início do colapso	121
7.3	A explosão	122
8	GERAÇÃO DE NEUTRINOS EM SUPERNOVAS	123
8.1	Processos de produção de neutrinos	123
8.1.1	Aniquilação de pares	124
8.1.2	Produção pro fótons	127
8.1.3	Demais processos	129
8.2	Curvas de emissão	129
III	DETECÇÃO	133
9	O EXPERIMENTO	135
9.1	Descrição Técnica	135
9.2	Objetivos	137
9.3	Canais de interação	138
9.4	Outros detectores	139
10	SIMULAÇÃO	141
10.1	Determinação da supernova	141
10.2	Espectro esperado de detecção	143
10.3	Flutuações estatísticas	146
10.4	Ajuste bayesiano	147
10.5	Recuperando a distância	149
11	ANÁLISE DOS RESULTADOS	151
11.1	Supernova e espectro de detecção	151
11.2	Espectro realístico	153
11.3	Estimativa de T e η	153
11.4	Estimativa da distância	156
11.5	Limitações e aprimoramentos	157
	Conclusão	161
	REFERÊNCIAS	163

APÊNDICES	169
APÊNDICE A – FORMALISMO LAGRANGEANO	171
APÊNDICE B – TEOREMA DE NOETHER	173
APÊNDICE C – DIAGRAMAS DE FEYNMAN PARA A FORÇA ELETRO- FRACA	175
APÊNDICE D – INTERAÇÃO E OS DIAGRAMAS DE FEYNMAN	181
APÊNDICE E – CAMPO VETORIAL MASSIVO E NÃO-MASSIVO	185
APÊNDICE F – TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV	193
ANEXOS	195
ANEXO A – CÓDIGO UTILIZADO NA SIMULAÇÃO	197

Introdução

Em 1930, Wolfgang Pauli propôs a existência de uma nova partícula, ainda não detectada, para explicar o espectro contínuo de energias do elétron emitido no decaimento radioativo beta (BROWN, 1978)². Esta partícula deveria ser neutra, leve e possuir spin igual a 1/2 (em unidades naturais) para que houvesse conservação de momento angular, energia e carga no processo. Em 1934, Enrico Fermi utiliza esta partícula teorizada para elaborar sua teoria para o decaimento beta e a nomeia neutrino (pequeno nêutron em italiano) (FERMI, 1934), onde um nêutron se converteria em um próton, emitindo um elétron e um neutrino (que mais tarde foi identificado como na verdade um anti-neutrino elétron $\bar{\nu}_e$), seguindo a reação $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$. A existência desta partícula teorizada só foi comprovada experimentalmente em 1956 por Clyde L. Cowan e Frederick Reines em um experimento realizado nas proximidades de um reator nuclear através do processo de decaimento beta inverso $\nu_e + p^+ \rightarrow n^0 + e^+$ (COWAN et al., 2000). Desde então, novas descobertas relacionadas aos neutrinos se seguiram, como a descoberta de um segundo tipo de neutrino, o neutrino múon ν_μ em 1962 (DANBY et al., 1962), o terceiro e último tipo conhecido, o neutrino tau ν_τ , em 2000 (KODAMA et al., 2001) e os experimentos que confirmaram a oscilação de neutrinos no início do século XX e início do século XXI (FUKUDA et al., 1998) e (COLLABORATION et al., 2001). Atualmente, o neutrino é descrito em boa parte pelo modelo padrão de partículas elementares (Figura), uma espécie de tabela periódica dos físicos, porém, o neutrino apresenta muitas características que fogem ao modelo padrão, como o fenômeno de oscilação de sabor mencionado acima.

Talvez uma das descobertas mais interessantes durante este período tenha sido a supernova 1987A. A supernova, processo no qual uma estrela explode no fim de sua vida, gerou um fluxo de neutrinos intenso que passou pela Terra cerca de 3 horas antes do sinal luminoso, a fluxo foi detectado por vários observatórios no mundo, porém, o que mais detectou neutrinos neste fluxo foi o super-kamiokande, no Japão⁴. Este acontecimento deu início à astronomia de neutrinos, na qual, a partir da análise de neutrinos incidentes na Terra, se obtém parâmetros relacionados a eventos astrofísicos como colisões de estrelas de nêutrons, supernovas, explosões de raios gama (GRB) e processos relacionados ao disco de acreção em buracos negros. Hoje, o SuperNova Early Warning System (SNEWS), composto de uma colaboração internacional entre vários observatórios, possui um sistema de aviso de ocorrência de supernovas baseado em fluxos de neutrinos, indicando para os telescópios do mundo onde a supernova irá ocorrer (SCHOLBERG, 2012). O aumento do conhecimento sobre a física de partículas em processos astrofísicos, a chamada astropartículas, tem proporcionado a abertura de diversas janelas de observação, entendimento para processos astrofísicos e a busca por matéria escura, além da

² Na época, apenas o próton e o elétron eram conhecidos, o nêutron só foi descoberto em 1932.

⁴ Apenas depois do sinal luminoso e da confirmação da ocorrência da supernova puderam entender o que significava aquele fluxo intenso de neutrinos que passou pela Terra.

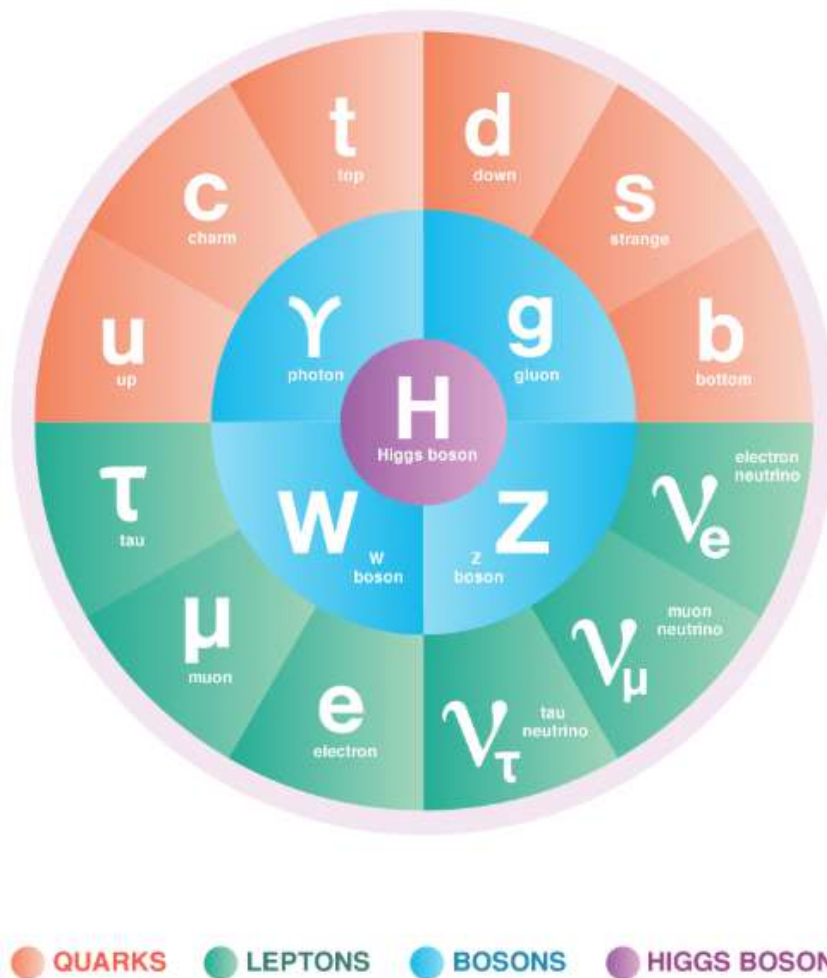


Figura 3 – O modelo padrão de partículas elementares. Imagem foi retirada de uma versão interativa do modelo padrão no site ([SYMMETRYMAGAZINE, 2015](#))³.

descoberta de processos físicos além do modelo padrão de partículas.

No momento, se encontra em construção um dos mais avançados detectores de neutrinos já elaborados, o Deep Underground Neutrino Detector (DUNE) será localizado no Estados Unidos da América, construído por uma colaboração internacional de 32 países e coordenado pelo Long Baseline Neutrino Facility (LBNF), para a realização de experimentos envolvendo o processo de oscilação de neutrinos, detecção de supernovas. O DUNE consiste de dois detectores posicionados a 1300 km de distância um do outro, embaixo da Terra, cada detector é uma câmara de projeção de argônio líquido, cujo funcionamento será explicado em mais detalhes no capítulo 5. A realização do DUNE abre portas para a exploração da física de neutrinos e sua associação com eventos astrofísicos da forma mais avançada e nos proporcionará novas ferramentas de estudo destas intrigantes partículas elementares.

Neste trabalho, temos o intuito de explorar os aspectos teóricos e experimentais da física de neutrinos e sua conexão com processos de supernovas, portanto, iniciamos a monografia com uma revisão da base para a elaboração teórica da física de neutrinos, isto é, pretendemos mostrar como que a teoria descreve as interações destas partículas e propriedades delas, para isso,

iniciamos no capítulo 1 uma breve introdução à teoria de grupos, sendo esta a base matemática para a elaboração teórica da física de partículas elementares.

Seguindo adiante, apresentamos aspectos clássicos da equação de campo (campo de Dirac) que descreve o grupo de partículas no qual os neutrinos estão inseridos, os férmions.

Logo após, tomamos um tratamento quântico deste mesmo campo, iniciando assim a previsão teórica da existência destas partículas, veremos que ao realizar um processo de quantização no campo de Dirac, prevemos a existência de partículas massivas de spin $1/2$ (em unidades naturais), os chamados férmions e seus respectivos anti-férmions, que possuem cargas opostas e helicidades trocadas.

No capítulo 4 então, começamos a nos voltar para a pergunta de como estas partículas devem interagir com outras e, para responder isso fazemos uso dos diagramas de Feynman. Isso finaliza a parte teórica deste projeto de tese, na tese final, ainda iremos ter capítulos adicionais explicando como estas interações se encaixam no processo de supernovas e como o fenômeno de oscilação de neutrinos ocorre à medida que os mesmos viajam pelo espaço.

Em seguida, no capítulo 5, tratamos do desenvolvimento da teoria eletrofraca para interações fundamentais. Utilizando como inspiração o desenvolvimento da eletrodinâmica quântica. Durante este capítulo cobrimos o mecanismo de Higgs, obtendo por fim a lagrangiana padrão da força eletrofraca.

Passamos então para a aplicação da teoria em problemas essenciais para a validação experimental da mesma, bem como a descrição de interações que são usadas no detector DUNE para se observar neutrinos.

O capítulo 7 é dedicado brevemente para a explicação do ciclo de vida estelar e o colapso.

Continuando o assunto iniciado no capítulo 7, o capítulo 8 aborda a geração de neutrinos durante o colapso estelar e as curvas de emissão obtidas por simulações numéricas.

No capítulo 9 descrevemos o funcionamento do DUNE, fornecendo seus detalhes técnicos e fazendo comparações com demais detectores de neutrinos existentes.

O penúltimo capítulo, é dedicado à descrição da simulação experimental, fornecendo os detalhes necessários para o entendimento da construção da simulação, bem como a análise de resultados.

Por fim, no último capítulo, analisamos os resultados obtidos das simulações e discutimos limitações e aprimoramentos que podem ser aplicados, afim de se obter resultados mais realísticos.

Portanto, este trabalho tem como objetivo geral revisar de maneira clara todo o aspecto teórico por trás da física de neutrinos e sua conexão com a física de supernovas, e também, explorar o aspecto experimental da detecção destes neutrinos provenientes de supernovas e

como que sua detecção abre as portas para um novo olhar sobre os processos astrofísicos.

Vale ressaltar que ao longo deste projeto, utilizaremos o sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$). Além disso, utilizamos a notação de Einstein, onde índices repetidos são somados, por exemplo $x^\mu x_\mu = \sum_\mu x^\mu x_\mu$ para simplificar a escrita das contas.

Parte I

Física de Partículas e Neutrinos

1 Teoria de Grupos

O estudo de partículas elementares e suas interações se baseia no uso da teoria quântica de campos (TQC), esta por sua vez possui uma base matemática muito forte em teoria de grupos. Por esta razão, começamos o estudo explorando os aspectos mais importantes da teoria de grupos para a física de partículas.

Um grupo é um conjunto que possui alguma operação capaz de levar um ou dois elementos do conjunto em um terceiro elemento obedecendo aos critérios de associatividade, reversibilidade, identidade e fechamento. Um exemplo visual desta definição pode ser utilizado ao se considerar o cubo mágico (*Rubik's cube*), onde podemos considerar cada possível rotação em uma face do cubo como um elemento de um conjunto de rotações. A partir de um dado conjunto de rotações que nos levam a uma nova configuração do cubo, podemos criar um elemento do grupo composto por um movimento do cubo, que é determinado por uma sequência de rotações. Como as rotações são reversíveis, associativas, fechadas e possuem um elemento identidade, isto é, podemos voltar à mesma configuração inicial após uma certa quantidade de rotações em um lado, a configuração do cubo mágico pode ser considerado um elemento do grupo de configurações do cubo mágico. Este grupo é conhecido como grupo de Rubik ([JOYNER, 2008](#)).

1.1 Álgebra de Lie

Os primeiros tipos de grupos a serem estudados aqui, serão os grupos de Lie. O grupo de Lie é aquele no qual os elementos g dependem de forma contínua e diferenciável do conjunto de parâmetros reais θ^a , $a = 1, \dots, N$. Podemos escolher os parâmetros θ^a de tal forma que o elemento identidade do grupo corresponda a θ^0 , $g(0) = e$.

Podemos então escolher formas de se representar um grupo, uma representação linear R de um grupo é uma operação que atribui a um elemento genérico g , um operador linear $D_R(g)$ definido no espaço linear

$$g \mapsto D_R(g). \quad (1.1)$$

Com as seguintes propriedades:

$$D_R(e) = 1; \quad (1.2)$$

$$D_R(g_1)D_R(g_2) = D_R(g_1g_2). \quad (1.3)$$

O espaço onde os operadores $D_R(g)$ atuam é a base da representação R . A base, em representação matricial, é um espaço vetorial de dimensão n , e um elemento g do grupo é representado por uma matriz $n \times n$, $(D_R(g))_j^i$. Assim, assumindo uma base formada por (ϕ^1, \dots, ϕ^n) , um elemento g do grupo, induz a transformação vetorial na base

$$\phi^i \rightarrow (D_R(g))_j^i \phi^j. \quad (1.4)$$

Podemos procurar interpretar g como uma transformação em um determinado espaço, a partir de uma representação específica, isto é, o elemento do grupo induz na base da representação, uma transformação gerada pelo operador linear atribuído ao grupo.

Seria interessante procurar algumas propriedades do grupo de Lie que independessem da representação que escolhermos, algo que possa ser geral para o grupo inteiro. Estas propriedades são chamadas de **álgebras de Lie**. Para algum θ^a infinitesimal, isto é, na vizinhança do elemento identidade, temos

$$D_R(\theta) \approx 1 + i\theta_a T_R^a, \quad (1.5)$$

sendo

$$T_R^a = -i \left. \frac{\partial D_R}{\partial \theta_a} \right|_{\theta=0}.$$

Aqui, T_R^a são chamados de geradores do grupo na representação R . Agora, se considerarmos θ^a longe da identidade, os elementos $g(\theta)$ podem ser representados por

$$D_R(g(\theta)) = e^{i\theta_a T_R^a}, \quad (1.6)$$

o fator i na exponencial é escolhido de tal forma que na representação R , os geradores sejam hermitianos, então $D_R(g)$ é unitária.

Dadas duas matrizes $D_R(g_1) = e^{i\alpha_a T_R^a}$ e $D_R(g_2) = e^{i\beta_a T_R^a}$, o produto delas é igual a $D_R(g_1 g_2) = e^{i\delta_a T_R^a}$, onde $\delta_a = \delta_a(\alpha, \beta)$.

$$e^{i\alpha_a T_R^a} e^{i\beta_a T_R^a} = e^{i\delta_a T_R^a}. \quad (1.7)$$

Em geral, se A e B são matrizes, $e^A e^B \neq e^{A+B}$. Assim, não podemos simplesmente dizer que $\delta_a = \alpha_a + \beta_a$. Tomando o logaritmo de ambos os lados e expandindo até segunda ordem em α e β o lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned}
i\delta_a T_R^a &= \ln \left[\left(1 + i\alpha_a T_R^a + \frac{1}{2}(i\alpha_a T_R^a)^2 \right) \left(1 + i\beta_a T_R^a + \frac{1}{2}(i\beta_a T_R^a)^2 \right) \right] = \\
&= \ln \left[1 + i(\alpha_a + \beta_a) T_R^a - \frac{1}{2}(\alpha_a T_R^a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_a T_R^a)^2 - \alpha_a \beta_b T_R^a T_R^b \right].
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Da primeira para a segunda linha, ignoramos os termos de ordem 3 e 4 em T_R^a . Se fizermos a expansão $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$, considerando tudo que aparece após o 1 na equação (1.8) como sendo nosso x , e, logo em seguida compararmos os dois lados da igualdade, encontramos

$$\alpha_a \beta_a [T_R^a, T_R^b] = i\gamma_c(\alpha, \beta) T_R^c, \tag{1.9}$$

sendo $\gamma_c(\alpha, \beta) = -2(\delta_c(\alpha, \beta) - \alpha_c - \beta_c)$. γ_c deve ser linear em α_a e β_a , então, podemos escrever a relação geral $\gamma_c = \alpha_a \beta_a f_c^{ab}$ para alguma constante f_c^{ab} . Assim reescrevemos como

$$[T^a, T^b] = i f_c^{ab} T^c. \tag{1.10}$$

Este resultado independe da representação utilizada. É a chamada **álgebra de Lie**. Mesmo que a forma do gerador T^a dependa da representação, a constante f_c^{ab} não depende. Este resultado continua válido para ordens maiores da expansão em (1.8), mas por simplicidade, não faremos isto aqui. Também se é possível chegar a este resultado por outros caminhos mais formais (HALL, 2015). Para um grupo abeliano, ou seja, um grupo no qual os elementos do grupo comutam entre si, $f_c^{ab} = 0$, já que $\delta_a = \alpha_a + \beta_a$ neste caso.

1.2 Álgebra de Lorentz

O segundo grupo de interesse a ser estudado é o grupo de Lorentz. Este é definido como o grupo das transformações de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \tag{1.11}$$

que deixam invariante a quantidade $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. O grupo de transformações do espaço de coordenadas $(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ que deixam invariante a forma quadrática $(y_1^2 + \dots + y_m^2) - (x_1^2 + \dots + x_n^2)$ é chamado de grupo ortogonal $O(n, m)$. O grupo de Lorentz é então o $O(3, 1)$. A condição que a matriz Λ deve satisfazer para manter a forma quadrática invariante é

$$\eta_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu}(\Lambda_{\rho}^{\mu})(\Lambda_{\sigma}^{\nu}) = \eta_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} \Rightarrow \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}\Lambda_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\sigma}^{\nu}. \quad (1.12)$$

Em forma matricial, $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, tirando o determinante, $(\det \Lambda)^2 = 1$. Transformações com $\det \Lambda = -1$ podem sempre ser reescritas como um produto de transformações com $\det \Lambda = 1$ com uma transformação de paridade $(t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$, ou uma reflexão em um eixo $(t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, y, z)$, ou uma reversão temporal $(t, x, y, z) \rightarrow (-t, x, y, z)$ (HALL, 2015).

O subgrupo de $O(3, 1)$ com $\det \Lambda = 1$ é denotado $SO(3, 1)$.

Se considerarmos uma transformação infinitesimal

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}, \quad (1.13)$$

temos que,

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \Lambda_{\rho}^{\mu}\eta_{\mu\nu}\Lambda_{\sigma}^{\nu} = (\delta_{\rho}^{\mu} + \omega_{\rho}^{\mu})\eta_{\mu\nu}(\delta_{\sigma}^{\nu} + \omega_{\sigma}^{\nu}) = \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho}^{\mu}\eta_{\mu\nu}\delta_{\sigma}^{\nu} + \omega_{\sigma}^{\nu}\eta_{\mu\nu}\delta_{\rho}^{\mu} + O(\omega^2) \Rightarrow \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

já que $\eta_{\mu\nu}\delta_{\rho}^{\mu} = \delta_{\nu\rho} = \eta_{\nu\rho}$. $\eta_{\mu\nu}$ é uma matriz 4×4 de 6 elementos independentes, isso significa que o grupo de Lorentz possui 6 parâmetros. Os primeiros 3 deles são as transformações que mantêm t invariante, correspondendo ao grupo de rotações $SO(3)$, gerado pelas rotações nos planos xy , yz e xz . Os outros 3 parâmetros são rotações no plano xt , yt e zt que mantêm as quantidades $t^2 - x^2$, $t^2 - y^2$ e $t^2 - z^2$ invariante, respectivamente. Essas transformações são chamadas de **boosts** na direção de x para a rotação no plano xt , por exemplo.

$$t \rightarrow \gamma(t + \beta x); \quad (1.15)$$

$$x \rightarrow \gamma(x + \beta t), \quad (1.16)$$

onde,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.17)$$

e $-1 < \beta < 1$. Sem o sistema a de unidades naturais, β é a razão entre a velocidade de um objeto e a velocidade da luz, porém, em unidades naturais onde $c = 1$, β é simplesmente a velocidade

do corpo dada em termos da velocidade da luz, isto é, uma velocidade de 0,4 indica que o corpo se move a $0,4c$.

Os 6 parâmetros independentes no grupo de Lorentz são então, os 3 ângulos de rotação e as 3 componentes da velocidade. Correspondendo a estes 6 geradores do grupo, escrevemos $J^{\mu\nu}$, tal que, $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$. Um elemento genérico do grupo de Lorentz é escrito como

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}. \quad (1.18)$$

Esta escrita nos diz que o elemento do grupo de transformações de Lorentz é escrito em termos do gerador da transformação. O fator $1/2$ foi introduzido pois o somatório acaba contando os índices μ e ν duas vezes.

O conjunto ϕ^i , na representação R se transforma como

$$\phi^i \rightarrow \left[e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_R^{\mu\nu}} \right]^i_j \phi^j. \quad (1.19)$$

Sobre uma variação infinitesimal da transformação de ϕ^i , obtemos

$$\delta\phi^i = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} (J_R^{\mu\nu})^i_j \phi^j. \quad (1.20)$$

Bem, as grandezas físicas podem ser representadas de acordo com sua transformação sobre o grupo de Lorentz. Um escalar é invariante sobre essas transformações, como a massa de repouso de uma partícula por exemplo. Um vetor-contravariante V^μ se transforma de acordo com

$$V^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu. \quad (1.21)$$

A representação quadrivetorial é a mais interessante para o grupo de Lorentz. Nesse caso, os índices i e j são índices de Lorentz e cada gerador é uma matriz 4×4 $(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma$ de forma

$$(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\nu - \eta^{\nu\rho}\delta_\sigma^\mu). \quad (1.22)$$

Usamos este resultado para computar os comutadores entre os geradores.

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}). \quad (1.23)$$

Esta é a chamada álgebra de Lorentz de $SO(3, 1)$. Fisicamente, esta é a álgebra de rotações no espaço-tempo, veremos na sessão 1.4 que a álgebra de Poincaré é a álgebra de rotações e translações no espaço tempo. Agora deve começar a ficar claro porque a teoria de grupos é a base matemática para a física de partículas, uma vez que estamos interessados em propriedades da dinâmica e simetria das partículas elementares no espaço-tempo, realizamos translações e rotações no espaço-tempo e utilizamos essas álgebras para construir e fundamentar as teorias, uma vez que buscamos construir uma teoria que seja invariante sobre transformações dentro destes grupos, ou seja, não queremos que a física mude ao se realizar uma transformação de Lorentz por exemplo, assim, nossos operadores dentro da teoria devem satisfazer estas álgebras de grupos.

Convenientemente, rearranjamos as 6 componentes de $J^{\mu\nu}$ em 2 vetores espaciais,

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} \quad (1.24)$$

$$K^i = J^{i0}, \quad (1.25)$$

e, em termos destes vetores, reescrevemos a álgebra de Lie para este grupo como

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k; \quad (1.26)$$

$$[J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk} K^k; \quad (1.27)$$

$$[K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk} J^k. \quad (1.28)$$

A primeira destas relações é a álgebra de Lie do grupo $SU(2)$, que corresponde ao grupo das matrizes unitárias de 2 dimensões e determinante igual a 1, e mostra que J^i é o momento angular. A segunda nos diz que \vec{K} é um vetor espacial.

1.3 Representação de Campos

Além da representação vetorial e tensorial, podemos escolher representar os geradores e os elementos de um grupo na representação spinorial. Esta representação, como o nome já sugere, inclui o spin. já que o spin muda de sinal sobre uma rotação de 2π , então essa representação não faz parte de $SO(3)$, e sim de $SU(2)$. As álgebras de Lie de $SU(2)$ e $SO(3)$ são as mesmas, dadas pelas álgebras de momento angular. Isso significa que sobre uma transformação infinitesimal, ambas são iguais. Quando consideramos $SU(2)$, consideramos spins semi-inteiros a medida que $SO(3)$ considera spins inteiros, portanto, em $SU(2)$, as suas representações são rotuladas pelos índices $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. A representação de $j = 1/2$ é chamada representação spinorial, que possui dimensão 2, onde o gerador J^i é dado por

$$J^i = \frac{\sigma^i}{2}, \quad (1.29)$$

e σ^i são as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.30)$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.31)$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

que satisfazem a identidade $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k$.

A representação spinorial é a representação fundamental do $SU(2)$. Fisicamente, isso significa que as partículas de spin 1/2 podem construir sistemas de todos os possíveis spins inteiros e semi-inteiros. Por exemplo, dois estados de spin 1/2 podem resultar em um estado de spin 0 ou 1.

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = 0 \oplus 1. \quad (1.33)$$

Queremos manter spinores em uma teoria relativística, ou seja, devemos conter a representação do grupo de Lorentz dentro de nossa teoria. Começando com a álgebra de Lorentz (1.26) - (1.28) e definimos

$$\vec{J}^\pm = \frac{\vec{J} \pm i\vec{K}}{2}, \quad (1.34)$$

reescrevendo as álgebras de Lie como

$$[J^{+,i}, J^{+,j}] = i\epsilon^{ijk} J^{+,k}; \quad (1.35)$$

$$[J^{-,i}, J^{-,j}] = i\epsilon^{ijk} J^{-,k}; \quad (1.36)$$

$$[J^{+,i}, J^{-,j}] = 0. \quad (1.37)$$

Como J^+ obedece a álgebra de $SU(2)$ e J^- também, e elas comutam entre si, a representação da álgebra de Lorentz pode ser rotulada por dois semi-inteiros: (j^+, j^-) . A dimensão dessa

representação é $(2j^- + 1)(2j^+ + 1)$, e o gerador de rotações \vec{J} é relacionado por $\vec{J} = \vec{J}^+ + \vec{J}^-$. Temos dois casos mais simples para essas representações, examinaremos elas primeiro, que são $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$. Estas representações são tanto bidimensionais e spinoriais. Denotamos por $(\Psi_L)_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ o spinor $(\frac{1}{2}, 0)$ e por $(\Psi_R)_\alpha$ o spinor $(0, \frac{1}{2})$. Ψ_L é chamado de spinor de Weyl canhoto e Ψ_R de spinor de Weyl destro.

Nos perguntamos agora como são os geradores \vec{J} e \vec{K} na representação de Weyl. Para encontrar a resposta, considere primeiro a representação $(\frac{1}{2}, 0)$, nela \vec{J}^- é representado por uma matriz 2×2 e $J^+ = 0$. A solução de (1.36) é $\vec{J}^- = \vec{\sigma}/2$ e então $\vec{J} = \vec{J}^+ + \vec{J}^- = \vec{\sigma}/2$ e $\vec{K} = -i(\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = i\vec{\sigma}/2$. Com isso, somos capazes de determinar como o spinor de Weyl se transforma sobre transformações de Lorentz. Usando (1.18), reescrevemos Λ como

$$\Lambda = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J} + i\vec{\eta} \cdot \vec{K}} \quad (1.38)$$

e então,

$$\Psi_L \rightarrow \Lambda_L \Psi_L = e^{\left(-i\vec{\theta} - \vec{\eta}\right) \frac{\vec{\sigma}}{2}} \Psi_L. \quad (1.39)$$

Repetindo os mesmos passos na representação $(0, \frac{1}{2})$, encontramos $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$, $\vec{K} = -i\vec{\sigma}/2$ e

$$\Psi_R \rightarrow \Lambda_R \Psi_R = e^{\left(-i\vec{\theta} + \vec{\eta}\right) \frac{\vec{\sigma}}{2}}. \quad (1.40)$$

Nosso principal motivo para estudar a simetria de Lorentz é construir uma teoria invariante por Lorentz. Para isso, escolhemos construir uma representação de campo $\phi(x)$, sendo que $\phi(x)$ é uma função das coordenadas, onde, sobre uma transformação do grupo de Lorentz (1.11) o campo se transforma de acordo com

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x'). \quad (1.41)$$

Para encontrar a forma explícita da transformação do campo, precisamos definir se estamos trabalhando com um campo escalar, vetorial ou spinorial. As análises para o caso de um campo escalar podem ser encontradas em (MAGGIORE, 2005), entretanto, trabalharemos aqui inicialmente com os campos de Weyl, compostos por aqueles campos que se transformam como

$$\Psi_L(x) \rightarrow \Psi'_L(x') = \Lambda_L \Psi_L(x), \quad (1.42)$$

onde Λ_L é dado por (1.39). Para encontrar os geradores deste campo fazemos uma pequena variação do campo em um ponto fixo x

$$\delta_0 \psi_L = \psi'_L(x) - \psi_L(x). \quad (1.43)$$

Expandindo em primeira ordem em δx , reescrevemos

$$\begin{aligned} \delta_0 \psi_L &= \psi'_L(x' - \delta x) - \psi_L(x) = \psi'_L(x') - \delta x^\rho \partial_\rho \psi_L(x) - \psi_L(x) = \\ &= (\Lambda_L - 1) \psi_L(x) - \delta x^\rho \partial_\rho \psi_L(x), \end{aligned} \quad (1.44)$$

vemos que $\delta_0 \psi_L$ é dividido em duas partes, uma parte vem da variação da coordenada δx^ρ , que por sinal é a mesma para os campos escalares (MAGGIORE, 2005) e outra que vem da variação do campo em si. A variação da coordenada δx^ρ é dada por

$$\delta x^\rho = \omega_\sigma^\rho x^\sigma = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho_\sigma x^\sigma, \quad (1.45)$$

e com esta expressão podemos notar que

$$-\delta x^\rho \partial_\rho \psi_L(x) = \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho_\sigma x^\sigma \partial_\rho \psi_L(x) = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \psi_L(x), \quad (1.46)$$

sendo $L^{\mu\nu} = -(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma x^\sigma \partial_\rho = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$. Agora, nos voltamos ao primeiro termo de (1.44) e escrevemos Λ_L como

$$\Lambda_L = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - O^2. \quad (1.47)$$

O que nos permite reescrever (1.44) como

$$\delta_0 \psi_L = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \psi_L, \quad (1.48)$$

onde, $J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$. Comparando (1.47) com (1.39) vemos que

$$e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} = e^{(-i\vec{\theta} - \vec{\eta}) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \Rightarrow S^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} S^{jk} = \frac{\sigma^i}{2}, \quad (1.49)$$

e $S^{i0} = i\sigma^i/2$. Reconhecemos $J^{\mu\nu}$ como a soma do momento angular orbital com o spin. Se fizermos o mesmo procedimento para um campo destro, veremos que obtemos os mesmos resultados, exceto que $S^{i0} = -i\sigma^i/2$.

Considere agora uma transformação de paridade $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$. Nesta operação o gerador de *boosts* muda de sinal $\vec{K} \rightarrow -\vec{K}$, mas $\vec{J} \rightarrow \vec{J}$, assim, para uma operação de paridade, os geradores J_+^i e J_-^i trocam entre si $J_+^i \rightarrow J_-^i$ e um objeto na representação (j_+, j_-) vai para (j_-, j_+) . Essa representação para o grupo de Lorentz não é a mesma representação para transformações de paridade, a não ser que $j_+ = j_-$. Ou seja, ψ_L e ψ_R não são base para representar uma transformação de paridade. Nesse caso, é conveniente usar uma representação de campos para transformações de Lorentz e de paridade. O campo que satisfaz estas condições é o campo de Dirac, que será melhor explorado no capítulo 2. A representação do campo de Dirac é dada por

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

esse campo possui 4 componentes complexas. Sobre uma transformação de Lorentz, o campo se transforma de acordo com $\Psi \rightarrow \Lambda_D \Psi$, onde

$$\Lambda_D = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

e sobre uma transformação de paridade, a coordenada $x^\mu \rightarrow x'^\mu = (t, -\vec{x})$ o campo se transforma da forma

$$\begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R(x') \\ \psi_L(x') \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Ainda podemos representar os campos spinoriais em termos dos spinores da Majorana, porém, esta representação não será abordada aqui, o leitor mais interessado pode encontrar mais detalhes em (MAGGIORE, 2005).

1.4 Álgebra de Poincaré

Além da invariância sobre transformações de Lorentz, também requisitamos invariância sobre translações do espaço-tempo. Escrevemos um elemento de translação de forma análoga ao elemento de rotação

$$e^{-P^\mu a_\mu}, \quad (1.53)$$

onde a_μ é o parâmetro de translação. As componentes do quadri-momento são os geradores de translações. A soma das translações com transformações de Lorentz geram um grupo de Poincaré, queremos agora encontrar a álgebra deste grupo.

As translações comutam entre si

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (1.54)$$

Para encontrar o comutador entre P^μ e $J^{\rho\sigma}$, começamos com os comutadores

$$[J^i, P^j] = i\varepsilon^{ijk} P^k; \quad (1.55)$$

$$[J^i, P^0] = 0. \quad (1.56)$$

A generalização dessas equações é dada por

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho). \quad (1.57)$$

Junto com a álgebra de Lorentz, estas equações formam a álgebra de Poincaré. Em termos de J^i , K^i , $P^0 = H$ e P^i elas são escritas como

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k; \quad (1.58)$$

$$[J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk} K^k; \quad (1.59)$$

$$[J^i, P^j] = i\varepsilon^{ijk} P^k; \quad (1.60)$$

$$[K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk} J^k; \quad (1.61)$$

$$[P^i, P^j] = 0; \quad (1.62)$$

$$[K^i, P^j] = iH\delta^{ij}; \quad (1.63)$$

$$[J^i, H] = 0; \quad (1.64)$$

$$[P^i, H] = 0; \quad (1.65)$$

$$[K^i, H] = iP^i. \quad (1.66)$$

Por fim, procuramos agora a forma correta de escrever P^μ na representação de campos do grupo de Poincaré. Para isso, requisitamos que todos os campos se comportem como escalares sobre translações. Assim, sobre translações $x \rightarrow x' = x + a$, todos os campos se transformam como $\phi'(x') = \phi(x)$.

Sobre uma transformação infinitesimal $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$, se fizermos a mesma imposição, temos que

$$\delta_0\phi = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x' - \varepsilon) - \phi(x) = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \phi(x), \quad (1.67)$$

por outro lado, já que o gerador de translações é o momento, segue que

$$\phi'(x' - \varepsilon) = e^{-iP^\mu(-\varepsilon_\mu)}\phi'(x') = e^{i\varepsilon_\mu P^\mu}\phi(x). \quad (1.68)$$

Em primeira ordem $\delta_0\phi = i\varepsilon_\mu P^\mu\phi(x)$. Comparando os dois resultados, concluímos que

$$P^\mu = i\partial^\mu, \quad (1.69)$$

logo,

$$H = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.70)$$

e com este resultado, podemos checar que

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = [i\partial^\mu, i(x^\rho\partial^\sigma - x^\sigma\partial^\rho)] = -\eta^{\mu\rho}\partial^\sigma + \eta^{\mu\sigma}\partial^\rho = i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho), \quad (1.71)$$

eles de fato obedecem à álgebra de Poincaré. Com isso, finalizamos o estudo e os pré-requisitos de noções em teoria de grupos para desenvolver a teoria por trás das partículas elementares e os neutrinos. Com as ferramentas matemáticas em mãos, seguimos adiante estudando propriedades do campo de Dirac.

2 Teoria Clássica de Campos

Com as ferramentas matemáticas determinadas, iniciamos a elaboração teórica da dinâmica e interação de partículas elementares, com foco nos férmions e as interações envolvendo neutrinos. A primeira etapa consiste na descrição do campo de Dirac, no qual resulta em sua famosa equação em 1928 (DIRAC, 1928) para a descrição da dinâmica de férmions. Em seguida, veremos a quantização deste mesmo campo e como os resultados refletem nas propriedades de férmions e anti-férmions.

2.1 Campo de Dirac Clássico

Tendo a nossa disposição tanto um spinor de Weyl canhoto ψ_L quanto um spinor de Weyl destro ψ_R , podemos construir dois novos escalares de Lorentz $\psi_L^\dagger \psi_R$ e $\psi_R^\dagger \psi_L$. A partir da forma explícita de Λ_L e Λ_R , vemos que $\Lambda_L^\dagger \Lambda_R = \Lambda_R^\dagger \Lambda_L = 1$, assim, $\psi_L^\dagger \psi_R \rightarrow \psi_L^\dagger \Lambda_L^\dagger \lambda_R \psi_R$ é um invariante da teoria. Dessa forma, temos duas combinações $\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L$ e $i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L)$ que se mantém invariante na teoria. A Lagrangiana de Dirac é construída em termos de invariantes de Lorentz, de tal forma que a teoria se torna um invariante no grupo de Lorentz $SO(3, 1)$.

$$\mathcal{L}_D = i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L), \quad (2.1)$$

onde, $\sigma'^\mu = (1, -\sigma^i)$ e $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$. Vemos ainda que, essa Lagrangiana é invariante sobre transformações de paridade, já que $\psi_L \leftrightarrow \psi_R$ e $\partial_i \leftrightarrow -\partial_i$, então $\sigma'^m u \partial_\mu \leftrightarrow \sigma^\mu \partial_\mu$. Aplicando as equações de Euler-Lagrange (Apêndice B) com respeito a ψ^*_L e ψ^*_R , obtemos

$$\sigma'^\mu i \partial_\mu \psi_L = m \psi_R, \quad (2.2)$$

$$\sigma^\mu i \partial_\mu \psi_R = m \psi_L, \quad (2.3)$$

as equações de Dirac em termos dos spinores de Weyl. Podemos agora encontrar um vínculo interessante neste campo, se aplicarmos $\sigma'^\mu i \partial_\mu$ em ambos os lados de (2.2) e usando (2.3), obtemos

$$-\sigma'^\mu \sigma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi_L = m^2 \psi_L,$$

já que $\partial_\mu \partial_\nu$ é simétrico, podemos repor $\sigma'^\mu \sigma^\nu$ por $1/2(\sigma^\mu \sigma'^\nu + \sigma'^\nu \sigma^\mu)$ e usar a identidade $\sigma^\mu \sigma'^\nu + \sigma'^\nu \sigma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$. Chegamos no resultado

$$(\square + m^2) \psi_L = 0. \quad (2.4)$$

Um resultado análogo pode ser encontrado para o campo ψ_R . Assim, vemos que a equação de Dirac implica na equação de Klein-Gordon massiva para ψ_L e ψ_R , dessa forma, as soluções para esses campos está vinculada a equação de Klein-Gordon, impondo nela, a relação de energia $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = p^2 + m^2$ em unidades naturais, vemos então que obrigatoriamente, as soluções descritas pela equação de Dirac obedecem esta relação de energia.

Entretanto, para estudar as propriedades do campo de Dirac é mais conveniente escrever tudo em termos do spinor de Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

que também pode ser representado como uma combinação de ψ_L e ψ_R

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\psi_L + \psi_R}{\sqrt{2}} \\ \frac{\psi_R - \psi_L}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Essa notação é chamada de notação quirial, esta representação é mais útil em sistemas ultra-relativísticos, nos quais a velocidade da partícula é aproximadamente c , $\beta \approx 1$, lembrando que $\beta = v/c = v$ em unidades naturais. A representação usual é mais comum para sistemas relativísticos, nos quais a velocidade é apenas grande o suficiente para ser comparável a c , e sistemas não relativísticos. Nesta representação quirial, construímos as matrizes γ como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

ou seja,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma'^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

onde, as matrizes (2.9) obedecem a álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Em termos do spinor de Dirac (2.5), a equação de Dirac assume a sua famosa forma mais conhecida

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \quad (2.11)$$

nos permitindo escrever a Lagrangiana de forma mais compacta

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad (2.12)$$

onde, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$. Em seguida, definimos a matriz quiral $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, que fica escrita como

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

sendo que, γ^5 obedece as seguintes propriedades.

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (2.14)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1\gamma^{5\dagger} = \gamma^5. \quad (2.15)$$

Sua utilidade fica mais clara ao considerarmos os projetores dos spinores

$$\frac{1 \pm \gamma^5}{2}, \quad (2.16)$$

que ao ser atuado no campo Ψ nos fornece suas projeções nas componentes destras e canhotas.

$$\frac{1 - \gamma^5}{2}\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.17)$$

$$\frac{1 + \gamma^5}{2}\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_R \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Sobre uma transformação de Lorentz (1.11), o campo de Dirac se transforma de acordo com

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = S(\Lambda)\Psi(x), \quad (2.19)$$

sendo $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$. Para uma transformação infinitesimal, $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \varepsilon\omega_\nu^\mu$. Aplicando essa transformação a S , obtemos $S(1 + \varepsilon\omega)$, tal que

$$S(1 + \varepsilon\omega) = 1 - \frac{i}{4}\varepsilon\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Comparando este resultado com

$$S(1 + \varepsilon\omega) = 1 + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

onde, $S^{\mu\nu}$ é a parte de spin do grupo de Lorentz, vemos que o spin na representação spinorial de Dirac é escrito como

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

Até aqui, observamos propriedades do campo de Dirac relacionadas a sua formulação e representação, uma descrição mais completa do campo de Dirac clássico pode ser encontrado em (GIUNTI; KIM, 2007), porém, esta análise mais completa foge do escopo deste projeto de tese.

2.2 Soluções do Campo de Dirac

Nos voltamos então para a forma da solução da equação de Dirac. Claro que, para sabermos uma solução específica, precisamos saber o Hamiltoniano do problema, o que faremos aqui é encontrar aspectos gerais da solução do campo, que possam ser explorados nos capítulos seguintes.

A solução geral da equação de Dirac livre (2.11) é escrita na forma de ondas planas no espaço dos momentos, uma vez que $[H_D, p] = 0$, a Hamiltoniana de Dirac comuta com o momento (GREINER et al., 1990).

$$\Psi(x) = u(p)e^{-ipx} \quad (2.23)$$

$$\Psi(x) = v(p)e^{ipx}, \quad (2.24)$$

sendo $u(p)$ e $v(p)$ spinores de 4 componentes. A solução $u(p)$ corresponde a um caso de energia positiva, enquanto que $v(p)$ corresponde a energias negativas, a interpretação deste resultado virá no capítulo seguinte, quando quantizarmos o campo. Substituindo (2.23) e (2.24) em (2.11) adquirimos o resultado

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0, \quad (2.25)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v(p) = 0. \quad (2.26)$$

Na representação quirial, escrevemos então

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_L(p) \\ u_R(p) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Considerando o referencial de repouso $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, a equação (2.25) fica na forma $(\gamma^0 - 1) u(p) = 0$, usando (2.13), conseguimos perceber que $u_L(p) = u_R(p)$. Notamos que a solução diminui o numero de graus de liberdade em dois já que a solução relaciona $u_L(p)$ com $u_R(p)$. Uma escolha de normalização usual é escolher $u_L(p) = u_R(p) = \sqrt{m}\chi$ onde χ é um spinor de duas componentes que obedece $\chi^\dagger \chi = 1$.

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$\chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

A solução para um valor de momento genérico (GREINER et al., 1990), assumindo \vec{p} na direção z nos da

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{E + p^3} \frac{1 - \sigma^3}{2} + \sqrt{E - p^3} \frac{1 + \sigma^3}{2} \right) \chi^s \\ \left(\sqrt{E + p^3} \frac{1 + \sigma^3}{2} + \sqrt{E - p^3} \frac{1 - \sigma^3}{2} \right) \chi^s \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde o índice 3 em p e em σ denota a componente 3 e não uma potência terceira e o índice $s = 1, 2$ indica as duas componentes para χ . No limite ultra relativístico, $p^\mu = (E, 0, 0, E)$, se $s = 1$, a equação (2.30) fica

$$u^1(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$u^2(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

assim, no limite ultra relativístico, ou no limite de massa 0, u^1 só tem componente destra enquanto que u^2 só tem componente canhota. No próximo capítulo, veremos que estas componentes estão associadas à helicidade da partícula. Um resultado análogo pode ser encontrado para $v(p)$

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{E + p^3 \frac{1-\sigma^3}{2}} + \sqrt{E - p^3 \frac{1+\sigma^3}{2}} \right) \eta^s \\ - \left(\sqrt{E + p^3 \frac{1+\sigma^3}{2}} + \sqrt{E - p^3 \frac{1-\sigma^3}{2}} \right) \eta^s \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

sendo,

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\eta^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Seguindo a definição de $\bar{\Psi}$ em (2.12), definimos os spinores $\bar{u}^s(p) = u^{s\dagger}(p)\gamma^0$ e $\bar{v}^s(p) = v^{s\dagger}(p)\gamma^0$, e seguindo a normalização $\chi^{s\dagger}\chi^s = \delta^{s's}$ e $\eta^{s\dagger}\eta^s = \delta^{s's}$ segue as seguintes propriedades entre os spinores.

$$\bar{u}^{s'}(p)u^s(p) = 2m\delta^{s's}; \quad (2.36)$$

$$\bar{v}^{s'}(p)v^s(p) = -2m\delta^{s's}; \quad (2.37)$$

$$\bar{u}^{s'}(p)v^s(p) = \bar{v}^{s'}(p)u^s(p) = 0; \quad (2.38)$$

$$\bar{u}^{s'}(p)\gamma^\mu u^s(p) = 2p^\mu\delta^{s's}; \quad (2.39)$$

$$\bar{v}^{s'}(p)\gamma^\mu v^s(p) = 2p^\mu\delta^{s's}; \quad (2.40)$$

$$u^{s\dagger}(p)u^s(p) = 2E_p\delta^{s's}; \quad (2.41)$$

$$v^{s\dagger}(p)v^s(p) = 2E_p\delta^{s's}. \quad (2.42)$$

Sabendo então a forma dessas soluções da equação, podemos expressar a solução mais geral do campo de Dirac em termos dos spinores $u^s(p)$, $v^s(p)$, $\bar{v}^s(p)$ e $\bar{u}^s(p)$ como a superposição das soluções com energias positivas e as soluções com energias negativas.

$$\Psi(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} \left(a_{s,p}u^s(p)e^{-ipx} + b_{s,p}^\dagger v^s(p)e^{ipx} \right) d^3p \quad (2.43)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} \left(a_{s,p}^\dagger \bar{u}^s(p)e^{ipx} + b_{s,p} \bar{v}^s(p)e^{-ipx} \right) d^3p, \quad (2.44)$$

onde $u^s(p)$, $v^s(p)$, $\bar{v}^s(p)$ e $\bar{u}^s(p)$ são spinores e $a_{s,p}$, $b_{s,p}$, $a_{s,p}^\dagger$ e $b_{s,p}^\dagger$ são amplitudes do campo relacionadas a cada solução. A normalização $1/[(2\pi)^3\sqrt{2E}]$ foi escolhida para se manter a invariância por transformações de Lorentz (MAGGIORE, 2005).

3 Teoria Quântica de Campos

Agora que introduzimos o campo de Dirac e exploramos alguns aspectos de suas soluções, estamos prontos para dar mais um passo além na elaboração da teoria por trás das interações de partículas elementares. Aqui, quantizaremos o campo de Dirac, afim de se obter a interpretação física de férmions e anti-férmions, além de observar características destas partículas, das quais os neutrinos fazem parte.

3.1 Processo de Quantização

Da mecânica quântica, sabemos que na quantização de um sistema, na interpretação de Schrodinger, promovemos as coordenadas q^i e p^i a operadores e impomos a relação de comutação $[q^i, p^j] = i\delta^{ij}$. Enquanto que, na interpretação de Heisenberg, as relações de comutação são impostas para um mesmo tempo t . Além do mais, como x é uma variável contínua, substituímos δ^{ij} para variáveis discretas por uma delta de Dirac.

Para o campo de Dirac, começamos com a Lagrangiana do campo (2.12)

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi, \quad (3.1)$$

e seu momento conjugado

$$\pi_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Psi)} = i\bar{\Psi}\gamma^0 = i\Psi^\dagger. \quad (3.2)$$

Requisitamos então que os campos de spin semi-inteiro sejam quantizados no mesmo tempo t por relações de anti-comutação, de acordo com o teorema *spin-statistic*, enunciado por Pauli em 1940 (PAULI, 1940). Ao mesmo tempo que, spin inteiros são quantizados obedecendo relações de comutação. Assim, impomos a condição

$$\left\{ \Psi_a(x, t), \Psi_b^\dagger(y, t) \right\} = \delta^{(3)}(x - y) \delta_{ab} \quad (3.3)$$

onde, a e b são índices de Dirac, que explicitam o espinor. A expansão do campo livre de Dirac em ondas planas, como já vimos, é dado por

$$\Psi(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s} u^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^s(p) e^{ipx} \right) d^3 p \quad (3.4)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s}^\dagger \bar{u}^s(p) e^{ipx} + b_{\vec{p},s} \bar{v}^s(p) e^{-ipx} \right) d^3 p. \quad (3.5)$$

Utilizando as equações para o campo (3.4) e (3.5) e substituindo elas na relação de anti-comutação (3.3), podemos obter as relações para os operadores a e b .

$$\left\{ a_{\vec{p}',s'}, a_{\vec{p},s}^\dagger \right\} = \left\{ b_{\vec{p}',s'}, b_{\vec{p},s}^\dagger \right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \delta^{s's}. \quad (3.6)$$

Em seguida, construímos o espaço de Fock introduzindo o estado de vácuo $|0\rangle$. O estado de Fock é o estado que representa a quantidade de partículas em um sistema, ou nesse caso, no campo. Por exemplo, em mecânica quântica, vemos a quantização do oscilador harmônico e introduzimos a função de onda para um estado de energia $|n\rangle$ como dependendo da atuação do operador de criação a^\dagger no estado de menor energia $|0\rangle$ para o sistema, isso significa que estamos representando o estado do sistema pelo número de quantas de energia inseridos nele. Fazemos a mesma coisa para os campos aqui, introduzimos um estado de vácuo, sem nenhum quanta relacionado de modo que

$$a_{\vec{p},s} |0\rangle = b_{\vec{p},s} |0\rangle = 0. \quad (3.7)$$

Como os operadores $a_{\vec{p},s}^\dagger$ e $b_{\vec{p},s}^\dagger$ anticomutam entre si, o estado de multipartículas resultante da atuação deles é anti-simétrico sobre a troca de 2 partículas, então, as partículas previstas pelo campo de Dirac obedecem a estatística de Fermi-Dirac e possuem spin semi-inteiro. Os estados de uma partícula são expressos e normalizados por

$$\sqrt{2E_p} a_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle \quad (3.8)$$

$$\sqrt{2E_p} b_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle. \quad (3.9)$$

A diferença entre uma partícula criada por a^\dagger e por b^\dagger ficará claro na próxima sessão. Vemos que os estados dependem do momento e do spin, assim, $a_{\vec{p},s}^\dagger$ cria partículas com momento p e spin s e o mesmo para $b_{\vec{p},s}^\dagger$. A interpretação correta dos $a_{\vec{p},s}^\dagger$ e $b_{\vec{p},s}^\dagger$ é a de uma distribuição de operadores entre os vários momentos p e spins s possíveis.

Nos voltamos agora para a construção da Hamiltoniana do campo após esse processo. A densidade Hamiltoniana é calculada primeiro pela expressão clássica

$$\mathcal{H} = \pi_{\Psi} \partial_0 \Psi - \mathcal{L} = i\Psi^\dagger \partial_0 \Psi - \bar{\Psi} (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) \Psi = \bar{\Psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \Psi, \quad (3.10)$$

e a Hamiltoniana de Dirac é calculada integrando a densidade Hamiltoniana

$$H = \int \bar{\Psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \Psi d^3x = \int \bar{\Psi} (-i\vec{\gamma} \cdot \nabla + m) \Psi d^3x. \quad (3.11)$$

Se substituirmos agora (3.4) e (3.5) em (3.11), os fatores com as exponenciais se cancelam devido à identidade

$$\int e^{i\alpha x} dx = 2\pi\delta(x), \quad (3.12)$$

em seguida, colocamos o ordenamento normal dos termos, onde todos os termos com \dagger ficam a esquerda dos termos sem \dagger e, sempre que trocamos um de lugar com outro, o sinal muda, obtemos a expressão final.

$$H = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} E_p \left(a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} + b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s} \right) d^3p. \quad (3.13)$$

Aqui, vemos mais claramente que os quantas do campo são criados por dois tipos de partículas diferentes, uma sendo criada por $a_{\vec{p},s}^\dagger$ e outra por $b_{\vec{p},s}^\dagger$. Exploraremos a seguir mais algumas propriedades do campo, afim de diferenciar estas duas partículas.

3.2 Partículas e Anti-Partículas

Em seguida, tratamos do operador momento para o campo, este é obtido pelo teorema de Noether B.

$$P^\mu = \int T^{0\mu} d^3x, \quad (3.14)$$

onde,

$$T^{0\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi)} \partial^\mu \Psi - \eta^{0\mu} \mathcal{L}, \quad (3.15)$$

é o tensor energia-momento do campo de Dirac e a Lagrangiana é dada por (3.1). Ao se realizar as operações no tensor energia-momento, e usando (2.39) e (2.40), chegamos ao resultado

$$P^\mu = \int \frac{p^\mu}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} + b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s} \right) d^3 p. \quad (3.16)$$

Similarmente, a carga de Noether associada a rotações espaciais é feita de uma parte orbital e uma parte de spin, usando a expressão para a corrente de Noether, a parte de spin é

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \int \Psi^\dagger \vec{\Sigma} \Psi d^3 p, \quad (3.17)$$

onde

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Substituindo as expressões (3.4) e (3.5), vemos que em um referencial de repouso ($\mathbf{p}=0$), o estado criado por $a_{\vec{p},s}^\dagger$ com $s = 1$ nos fornece $J_z = 1/2$ e com $s = 2$, $J_z = -1/2$. Enquanto que, o estado criado por $b_{\vec{p},s}^\dagger$ com $s = 1$ resulta em $J_z = -1/2$ e para $s = 2$, $J_z = 1/2$. Então, o estado criado por $a_{\vec{p},s}^\dagger$ com $s = 1$ possui helicidade $h = 1/2$, já que, ao fazer um *boost* na direção z , J_z não se altera. O mesmo vale para os outros estados, por exemplo, o estado criado por $b_{\vec{p},s}^\dagger$ com $s = 1$ possui helicidade $h = -1/2$. No caso dos neutrinos, espera-se que existam neutrinos de helicidade positiva (destros) e negativa (canhotos) em quantidades iguais, como é o caso dos fótons e dos elétrons por exemplo, que existem em quantidades iguais com relação à helicidade, entretanto, o que é observado é que todos os neutrinos são canhotos enquanto que todos os anti-neutrinos são destros. Esse fato foi observado em 1958 (GOLDHABER; GRODZINS; SUNYAR, 1958) e 1961 (BACKENSTOSS et al., 1961) em um experimento que verificava a helicidade de múons provenientes do decaimento de píons $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ para se saber a helicidade dos anti-neutrinos, que seriam igual à dos múons. Outra possibilidade é que existam neutrinos destros, porém, eles não interajam com a matéria de uma forma conhecida.

Para finalmente diferenciarmos as partículas criadas neste campo, calculamos a carga associada ao campo.

$$Q = i \int \Psi^\dagger \left(\frac{\vec{\partial}_0 - \overleftarrow{\partial}_0}{2} \right) \Psi d^3 x. \quad (3.19)$$

Realizando a substituição de (3.4) e (3.5),

$$\begin{aligned}
Q = & \int \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{p1}} \sqrt{2E_{p2}}} \left[\sum_s \left(a_{p1,s}^\dagger u^{s\dagger}(p_1) e^{ip_1x} + b_{p1,s} v^{s\dagger}(p_1) e^{-ip_1x} \right) E_{p2} \times \right. \\
& \times \left(a_{p2,s} u^s(p_2) e^{-ip_2x} - b_{p2,s}^\dagger v^s(p_2) e^{ip_2x} \right) + E_{p1} \sum_{s'} \left(a_{p1,s'}^\dagger u^{s'\dagger}(p_1) e^{ip_1x} - b_{p1,s'} v^{s'\dagger}(p_1) e^{-ip_1x} \right) \times \\
& \left. \times \left(a_{p2,s'} u^{s'}(p_2) e^{-ip_2x} + b_{p2,s'}^\dagger v^{s'}(p_2) e^{ip_2x} \right) \right] d^3x d^3p_1 d^3p_2,
\end{aligned}$$

aplicando a distributiva e juntando os termos iguais, obtemos

$$\begin{aligned}
Q = & \int \frac{1}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{p1}} \sqrt{2E_{p2}}} \left[\sum_{s,s'} a_{p1,s}^\dagger b_{p2,s'} u^{s\dagger}(p_1) u^{s'}(p_2) e^{-ix(p_2-p_1)} (E_{p1} + E_{p2}) + \right. \\
& + \sum_{s,s'} a_{p1,s'}^\dagger b_{p2,s}^\dagger u^{s'\dagger}(p_1) v^s(p_2) e^{-ix(p_1-p_2)} (E_{p1} - E_{p2}) + \sum_{s,s'} b_{p1,s} a_{p2,s'} v^{s\dagger}(p_1) u^s(p_2) e^{-ix(p_1+p_2)} \times \\
& \left. \times (E_{p2} - E_{p1}) - \sum_{s,s'} b_{p1,s} b_{p2,s'}^\dagger v^{s\dagger}(p_1) v^{s'}(p_2) e^{-ix(p_1-p_2)} (E_{p1} + E_{p2}) \right] d^3x d^3p_1 d^3p_2.
\end{aligned}$$

As integrais em d^3x irão resultar em deltas de Dirac $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_2 - p_1)$, $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_2 + p_1)$, ... graças a (3.12) e então $|p_1| = |p_2|$. Com isso, os termos de subtração entre E_{p1} e E_{p2} irão se cancelar, sobrando apenas por fim

$$Q = \int \frac{1}{(2\pi)^3 2E_p} \left(\sum_{s,s'} a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s'} u^{s\dagger}(p) u^{s'}(p) - \sum_{s,s'} b_{\vec{p},s} b_{\vec{p},s'}^\dagger v^{s\dagger}(p) v^s(p) \right) d^3p,$$

utilizando as relações (2.41) e (2.42), escrevemos finalmente

$$Q = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} - b_{\vec{p},s} b_{\vec{p},s}^\dagger \right) d^3p. \quad (3.20)$$

Com isso, vemos outra diferença entre os dois tipos de partículas criadas no campo de Dirac, as partículas criadas por $b_{\vec{p},s}^\dagger$ tem carga oposta àquelas criadas por $a_{\vec{p},s}^\dagger$ devido ao sinal negativo. Chamamos então as partículas criadas por $a_{\vec{p},s}^\dagger$ de férmions e aquelas criadas por $b_{\vec{p},s}^\dagger$ de anti-férmions, onde a diferença entre ambas está na carga oposta e na helicidade. Assim, podemos ter, por exemplo, no caso de $s = 2$ uma representação de acordo com a figura ??.

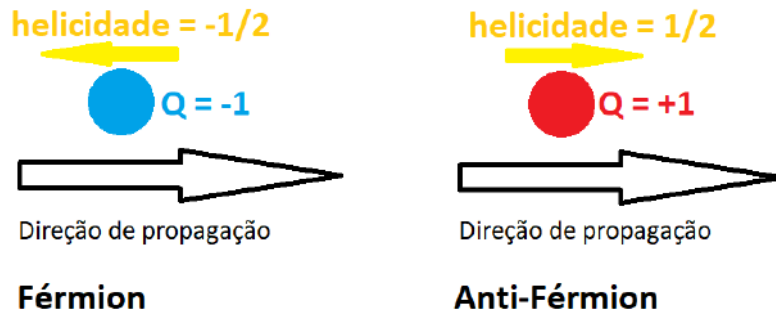


Figura 4 – Representação simples de um férmion de carga $Q = -1$ se propagando para a direita e um anti-férmion de carga $Q = +1$ se propagando na mesma direção.

3.3 Simetrias C,P

Como ultima análise das propriedades obtidas das partículas criadas pelo campo de Dirac, investigaremos como transformações de paridade, carga e tempo atuam nos estados destas partículas, ou seja, no operador Ψ que define o campo de Dirac.

Iniciaremos com a paridade. Construímos então o operador unitário de paridade P , onde sua atuação em um estado faz $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, enquanto que o spin se mantém o mesmo. Assim, para um férmion a , a atuação de P é

$$P |\vec{p}, s\rangle_a = \delta_a |-\vec{p}, s\rangle_a. \quad (3.21)$$

Incluimos aqui um fator de fase δ_a que pode ser resultado da operação de paridade, uma vez que estados representados no estado de Fock, diferindo de uma fase, ainda representam o mesmo estado físico. Sobre a atuação de P novamente, devemos agora ter $-\vec{p} \rightarrow -(-\vec{p}) = \vec{p}$, portanto $P^2 = 1$, onde 1 é o operador identidade. Dessa forma, $\delta_a = \pm 1$. Se queremos aplicar (3.21) em um estado de várias partículas, devemos estabelecer a atuação de P em $a_{\vec{p},s}^\dagger$ e $b_{\vec{p},s}^\dagger$.

$$Pa_{\vec{p},s}^\dagger = \delta_a a_{-\vec{p},s}^\dagger; \quad (3.22)$$

$$Pb_{\vec{p},s}^\dagger = \delta_b b_{-\vec{p},s}^\dagger, \quad (3.23)$$

ou seja,

$$Pa_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle = \delta_a a_{-\vec{p},s}^\dagger P b_{\vec{p},s}^\dagger |0\rangle = \delta_a \delta_b a_{-\vec{p},s}^\dagger b_{-\vec{p},s}^\dagger |0\rangle. \quad (3.24)$$

Aqui, estamos assumindo que o vácuo seja invariante e não-degenerado sobre transformações de paridade, isto é, $P|0\rangle = |0\rangle$, situações nas quais o vácuo é degenerado e a operação de

paridade leva a dois estados de vácuo distintos são exemplos de quebra de simetria espontânea (CHENG; LI; CHENG, 1984) e (MAGGIORE, 2005). Como P é unitário, $P^\dagger P = PP^\dagger = PP = 1$ temos que $Pa_{\vec{p},s}^\dagger P = \delta_a a_{-\vec{p},s}^\dagger$ e $Pa_{\vec{p},s} P = \delta_a a_{-\vec{p},s}$ e o mesmo para $b_{\vec{p},s}^\dagger$ e $b_{\vec{p},s}$. Agora, estamos equipados para investigar como o operador do campo de Dirac Ψ se transforma sobre paridade $\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = P\Psi(x)P$.

$$P\Psi(x)P = \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(\delta_a a_{-\vec{p},s} u^s(p) e^{-ipx} + \delta_b b_{-\vec{p},s}^\dagger v^s(p) e^{ipx} \right) d^3 p \quad (3.25)$$

Trocando a variável de integração de \vec{p} para $p' = -\vec{p}$ não mudamos o sinal de p^0 já que este é quadrático em p , ou seja, a energia se mantém constante sobre transformações de paridade, as exponenciais e^{ipx} se transformam para $e^{ipx'}$ onde $x' = (t, -\vec{x})$ e $e^{-ipx} \rightarrow e^{-ipx'}$. A partir das expressões (2.30) e (2.33) para os spinores do campo, vemos que a mudança de variáveis muda a representação para $u^s(p) = \gamma^0 u^s(p')$ e $v^s(p) = -\gamma^0 v^s(p')$. Renomeando p' de volta para p , tem se

$$P\Psi(x)P = \gamma^0 \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(\delta_a a_{\vec{p},s} u^s(p) e^{-ipx'} - \delta_b b_{\vec{p},s}^\dagger v^s(p) e^{ipx'} \right) d^3 p. \quad (3.26)$$

Se queremos que o operador Ψ seja uma representação da paridade, isso só será possível se $\delta_a = -\delta_b$. Isso nos mostra que a paridade de uma partícula de spin 1/2 é oposta á de sua anti-partícula. A lei de transformação de paridade é finalmente escrita como

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = \delta_a \gamma^0 \Psi(x'). \quad (3.27)$$

A paridade δ_a se torna um observável e pode ser medido para se diferenciar partículas e anti-partículas, como é o caso de um dos estudos sobre diferenças entre neutrinos e anti-neutrinos (KEMP; COLLABORATION, 2017), para partículas escalares (aquelas descritas por campos escalares, como o Bóson de Higgs e os píons), a fase de paridade é a mesma entre a partícula e as anti-partículas (MAGGIORE, 2005), portanto, a medição da fase de paridade em experimentos na física de partículas se torna um parâmetro essencial para a determinação da natureza escalar/spinorial da partícula e a diferenciação entre sua respectiva anti-partícula (GRIFFITHS, 2008).

Seguindo adiante, verificamos os efeitos de conjugação da carga. Analogamente ao procedimento realizado para a paridade, consideremos o operador de conjugação da carga C , cuja atuação em $a_{\vec{p},s}$ e $b_{\vec{p},s}$ é a de alteração da carga descrita pela distribuição de operadores, multiplicada por um fator de fase.

$$Ca_{\vec{p},s}C = \delta_C b_{\vec{p},s}; \quad (3.28)$$

$$Cb_{\vec{p},s}C = \delta_C a_{\vec{p},s}. \quad (3.29)$$

Novamente, a atuação de C duas vezes, nos retorna a identidade, assim, $\delta_C = \pm 1$ e também devemos saber como os spinores (2.30) e (2.33) se transformam sobre a conjugação da carga, para isso, basta considerar os casos em que $\vec{p} = (0, 0, p)$ e $\vec{p} = (0, p, 0)$ para observar que

$$u^s(p) = -i\gamma^2 (v^s(p))^* \quad (3.30)$$

$$v^s(p) = -i\gamma^2 (u^s(p))^*, \quad (3.31)$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} C\Psi C &= \delta_C \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(b_{\vec{p},s} u^s(p) e^{-ipx} - a_{\vec{p},s}^\dagger v^s(p) e^{ipx} \right) d^3 p = \\ &= -i\delta_C \gamma^2 \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left(b_{\vec{p},s} (v^s(p))^* e^{-ipx} - a_{\vec{p},s}^\dagger (u^s(p))^* e^{ipx} \right) d^3 p = \\ &= -i\delta_C \gamma^2 \Psi^*. \end{aligned} \quad (3.32)$$

A partir da própria definição do operador C , vemos que a conjugação da carga troca a partícula por sua anti-partícula porém, sem alterar seu spin ou momento, então, a conjugação da carga transforma uma partícula em sua anti-partícula ao mesmo tempo que inverte sua helicidade.

Deixamos claro agora as diferenças entre partículas e anti-partículas massivas de spin 1/2. Feito isso, seguimos agora para o estudo de como estas partículas interagem de maneira geral.

4 Interações

Agora que já vimos a quantização do campo e a existência das partículas de spin $1/2$, estamos prontos para estudar suas interações. As interações, irão depender da Hamiltoniana do evento, e por consequência da Lagrangiana que a descreve, assim, aqui introduziremos o formalismo por trás da construção dos diagramas de Feynman, para então tratar da Lagrangiana eletrofraca especificamente e descrever suas interações e aspectos específicos à física de neutrinos. Para isso, passaremos a tratar do formalismo Hamiltoniano para os campos, uma vez que as contas são "simplificadas" dessa forma. Assim, consideremos um campo geral dado por

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (4.1)$$

onde H_0 é a Hamiltoniana livre do campo e H_{int} é o termo de interação que é tratado como uma perturbação no campo.

Dessa forma, construiremos a descrição das interações e dos diagramas de Feynman utilizando elementos de teoria da perturbação.

4.1 Matriz-S

Suponha um estado inicial $|a(t_i)\rangle$ que em um tempo inicial t_i é um autoestado de um determinado operador, com autovalor a , por exemplo, a pode ser o conjunto de momentos e spins das partículas que definem este estado. Também imaginemos a existência de um outro estado $|b(t_f)\rangle$ que é um autoestado do mesmo operador, com autovalor b , em um tempo final t_f .

O estado $|a(t)\rangle$ tem sua evolução temporal descrita por

$$|a(t)\rangle = e^{-iH(t-t_i)} |a(t_i)\rangle = e^{-iH(t-t_i)} |a\rangle, \quad (4.2)$$

aqui, estamos denotando $|a(t_i)\rangle = |a\rangle$ para simplificar as contas. Em um tempo final t_f , a evolução de $|a\rangle$ é dada então por $e^{-iH(t_f-t_i)} |a\rangle$. A amplitude de probabilidade de que o estado $|a(t_f)\rangle$ seja o estado $|b(t_f)\rangle = |b\rangle$ é dada por

$$\langle b | e^{-iH(t_f-t_i)} | a \rangle. \quad (4.3)$$

No limite em que $t_f - t_i \rightarrow \infty$, o operador $e^{-iH(t_f-t_i)}$ é chamado de **Matriz-S** e seus elementos são calculados por (4.3). Então, o operador S , leva o estado inicial $|a\rangle$ no estado final $S|a\rangle$.

Seja $|n\rangle$ um estado normalizado, assim como $|a\rangle$, isto é, $\langle a|a\rangle = 1$, temos que

$$\sum_n |\langle n|S|a\rangle|^2 = \sum_n \langle a|S^\dagger|n\rangle \langle n|S|a\rangle = \langle a|S^\dagger S|a\rangle = 1, \quad (4.4)$$

portanto, S é unitário, expressando a conservação da probabilidade.

Porém, na mecânica quântica, temos duas formas de enxergar a evolução de um estado. A representação de Schrodinger é que a função de onda evolui no tempo (o que nós fizemos acima) enquanto que o operador se mantém fixo, enquanto que, na representação de Heisenberg, a função de onda é fixa e o operador que atua nela evolui no tempo, isto é, na representação de Heisenberg, os estados $|a\rangle$ são independentes de t , enquanto que os operadores que dependem de t . Dessa forma, podemos expressar um estado na representação de Schrodinger e passá-lo para a representação de Heisenberg mudando a notação.

$$|a, t_0\rangle = e^{-iHt_0} |a\rangle, \quad (4.5)$$

onde, na esquerda temos o estado descrito na representação de Heisenberg e na direita, na representação de Schrodinger. Assim, usaremos a interpretação de Heisenberg para calcular os elementos de S na próxima sessão, ou seja,

$$\langle b|S|a\rangle = \langle b, t_f|a, t_i\rangle. \quad (4.6)$$

4.2 Redução LSZ

Considere um elemento de S na forma

$$\langle p_1, p_2, \dots, p_n; t_f | k_1, k_2, \dots, k_m; t_i \rangle = \langle f | i \rangle, \quad (4.7)$$

f denota o estado final do sistema e i o estado inicial do sistema antes da interação. Queremos computar os elementos dessa matriz em termos do valor esperado de algum operador no estado de vácuo do campo. Começamos notando que podemos escrever os operadores de criação e aniquilação em termos da expansão dos campos utilizando uma transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned}
& \int \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s} u^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p},s}^\dagger v^s(p) e^{ipx} \right) e^{ipx} d^4x d^4p = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \int e^{ipx} \Psi(x) d^4x \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p},s} u^s(p) + b_{\vec{p},s}^\dagger v^s(p) \right) = \sqrt{2E_p} \int e^{ipx} \Psi(x) d^3x \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{s=1,2} \left(\bar{u}^{s'}(p) \gamma_0 a_{\vec{p},s} u^s(p) + \bar{u}^{s'}(p) \gamma^0 b_{\vec{p},s}^\dagger v^s(p) \right) = \sqrt{2E_p} \int e^{ipx} \Psi(x) \bar{u}^{s'}(p) \gamma^0 d^3x \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sqrt{2E_p} a_{\vec{p},s} = \int e^{ipx} \Psi(x) \bar{u}^s(p) \gamma^0 d^3x, \tag{4.8}
\end{aligned}$$

aqui, da primeira linha para a segunda, utilizamos a propriedade (3.12) para eliminar as integrais no lado esquerdo, da segunda linha para a terceira, multiplicamos pela esquerda por $\bar{u}^{s'}(p)$ e da terceira para a quarta, utilizamos as relações (2.39) e (2.40).

Fazendo um processo análogo a esse para os demais operadores, obtemos

$$\sqrt{2E_p} a_{\vec{p},s}^\dagger = \int e^{ipx} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 u^s(p) d^3x \tag{4.9}$$

$$\sqrt{2E_p} b_{\vec{p},s} = \int e^{ipx} \gamma^0 v^s(p) \bar{\Psi}(x) d^3x \tag{4.10}$$

$$\sqrt{2E_p} b_{\vec{p},s}^\dagger = \int e^{ipx} \bar{v}^s(p) \gamma^0 \Psi(x) d^3x. \tag{4.11}$$

Lembrando que em uma teoria livre, os operadores a e b e seus respectivos transpostos conjugados são independentes do tempo. Consideremos um operador que, em uma teoria livre, cria uma partícula com spin e carga definidos e localizados no espaço dos momentos perto de \vec{p}_1 e no espaço da posição, na origem.

$$\sqrt{2E_p} a_1^\dagger = \sqrt{2E_p} \int f_1(\vec{p}) a_{\vec{p}_1, s_1}^\dagger d^3p, \tag{4.12}$$

sendo

$$f_1(\vec{p}) \propto e^{-\frac{(\vec{p}-\vec{p}_1)}{4\sigma^2}}. \tag{4.13}$$

Assim, fazemos a_1^\dagger ser um operador de criação de uma única partícula, enquanto que $a_{\vec{p},s}^\dagger$ é uma distribuição de operadores, a integral então faz com que nosso operador a_1^\dagger dependa apenas do tempo, uma vez que o momento e o spin agora são fixos, e a função $f_1(\vec{p})$ é um pacote gaussiano para representar o estado criado no instante da criação. Seguimos então, supondo um sistema de duas partículas interagindo, mas o resultado será análogo para um caso de n partículas, ou um caso para anti-partículas, assim, nosso estado inicial pode ser considerado

como uma atuação dos operadores a^\dagger no vácuo para a partícula 1 e para a partícula 2 no limite em que $t \rightarrow -\infty$.

$$|i\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} a_1^\dagger(t) a_2^\dagger(t) |0\rangle. \quad (4.14)$$

E o estado final, descrito pela criação de outras duas partículas 1' e 2' no tempo $t \rightarrow +\infty$

$$|f\rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} a_{1'}^\dagger(t) a_{2'}^\dagger(t) |0\rangle. \quad (4.15)$$

Agora, podemos expressar o elemento de matriz S como

$$\langle f|i\rangle = \langle 0| a_{2'}(+\infty) a_{1'}(+\infty) a_1^\dagger(-\infty) a_2^\dagger(-\infty) |0\rangle. \quad (4.16)$$

Para computar este elemento, precisamos arrumar um jeito de expressar o estado final em termos do estado inicial adicionado de um termo extra. Dessa forma, procuramos calcular inicialmente a diferença entre o operador a^\dagger no estado inicial com o operador a^\dagger no estado final para uma das partículas interagentes.

$$\sqrt{2E_p} a_1^\dagger(-\infty) - \sqrt{2E_p} a_1^\dagger(+\infty) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_0 a_1^\dagger dt, \quad (4.17)$$

podemos usar (4.9) e (4.12) para escrever (4.17) como

$$\begin{aligned} \sqrt{2E_p} a_1^\dagger(-\infty) - \sqrt{2E_p} a_1^\dagger(+\infty) &= - \int f_1(\vec{p}) d^3 p \int \partial_0 (e^{ipx} \bar{\Psi}(x) \gamma^0 u^{s_1}(p)) d^4 x = \\ &= - \int f_1(\vec{p}) d^3 p \int \bar{\Psi}(x) (\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 - i \gamma^0 p^0) u^{s_1}(p) e^{ipx} d^4 x = \\ &= - \int f_1(\vec{p}) d^3 p \int \bar{\Psi}(x) (\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 - i \gamma^j p_i - im) u^{s_1}(p) e^{ipx} d^4 x = \\ &= - \int f_1(\vec{p}) d^3 p \int \bar{\Psi}(x) (\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 - i \gamma^j \overrightarrow{\partial}_i - im) u^{s_1}(p) e^{ipx} d^4 x = \\ &= - \int f_1(\vec{p}) d^3 p \int \bar{\Psi}(x) (\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i \gamma^j \overleftarrow{\partial}_i - im) u^{s_1}(p) e^{ipx} d^4 x = \\ &= -i \int f_1(\vec{p}) d^3 p \int \bar{\Psi}(x) (i \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) u^{s_1}(p) e^{ipx} d^4 x. \end{aligned} \quad (4.18)$$

No caso de um campo livre, esta equação se iguala a 0, e se $\bar{\Psi}(x)$ obedece à equação de Dirac de um campo livre, então $\bar{\Psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0$. Porém, para um campo em interação, esta equação será diferente de zero.

Analogamente, podemos encontrar o resultado para os demais operadores do campo fermiônico, ou campo de Dirac.

$$\sqrt{2E_p}a_1(+\infty) - \sqrt{2E_p}a_1(-\infty) = i \int f_1(\vec{p})d^3p \int e^{-ipx} \bar{u}^{s_1}(p) \left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) \Psi(x) d^4x \quad (4.19)$$

$$\sqrt{2E_p}b_1^\dagger(-\infty) - \sqrt{2E_p}b_1^\dagger(+\infty) = -i \int f_1(\vec{p})d^3p \int e^{ipx} \bar{v}^{s_1}(p) \left(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) \Psi(x) d^4x \quad (4.20)$$

$$\sqrt{2E_p}b_1(+\infty) - \sqrt{2E_p}b_1(-\infty) = -i \int f_1(\vec{p})d^3p \int \bar{\Psi}(x) \left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) v^{s_1}(p) e^{-ipx} d^4x. \quad (4.21)$$

Agora, voltamos para a equação (4.16) e notamos que os operadores já estão em ordem temporal, isto é, o produto está organizado de forma que os operadores em tempo maior ficam a esquerda e os em tempo menor ficam a direita. $T\{(t_2)y(t_1)\} = y(t_1)y(t_2)$ se $t_1 > t_2$ e $y(t_2)y(t_1)$ se $t_1 < t_2$. O que significa que podemos também escrever (4.16) como

$$\langle 0|T\{a_{2'}(+\infty)a_{1'}(+\infty)a_1^\dagger(-\infty)a_2^\dagger(-\infty)\}|0\rangle, \quad (4.22)$$

sem alterar em nada o resultado. Finalmente, substituindo as equações (4.18) e (4.19) em (4.22), vemos que $b_{1'}$ aniquila $|0\rangle$ enquanto que b_1^\dagger aniquila $\langle 0|$. Os pacotes de onda, após a propagação se dispersam e podem ser desconsiderados, assim, podemos agora tomar o limite em que $\sigma \rightarrow 0$ e a função $f_1(\vec{p}) = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_1)$. Por fim, acabamos com a fórmula de redução de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) para os elementos da matriz S .

$$\begin{aligned} \langle f|i\rangle &= i^4 \int e^{-ip_1'x_1'} [\bar{u}^{s_1'}(p_1')(-\gamma^{\mu_1'}\partial_{\mu_1'} + m)]_{\alpha_1'} e^{-ip_2'x_2'} [\bar{u}^{s_2'}(p_2')(-\gamma^{\mu_2'}\partial_{\mu_2'} + m)]_{\alpha_2'} \times \\ & \times \langle 0|T\{\Psi_{\alpha_2'}(x_2')\Psi_{\alpha_1'}(x_1')\bar{\Psi}_{\alpha_1}(x_1)\bar{\Psi}_{\alpha_2}(x_2)\}|0\rangle \left[\left(i\gamma^{\mu_1}\overleftarrow{\partial}_{\mu_1} + m\right)u^{s_1}(p_1)\right]_{\alpha_1} e^{ip_1x_1} \times \\ & \times \left[\left(i\gamma^{\mu_2}\overleftarrow{\partial}_{\mu_2} + m\right)u^{s_2}(p_2)\right]_{\alpha_2} e^{ip_2x_2} d^4x_1'd^4x_2'd^4x_1d^4x_2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dessa forma, conseguimos escrever os termos da matriz S em termos de coisas que conhecemos, exceto por $\langle 0|T\{\Psi_{\alpha_2'}(x_2')\Psi_{\alpha_1'}(x_1')\bar{\Psi}_{\alpha_1}(x_1)\bar{\Psi}_{\alpha_2}(x_2)\}|0\rangle$ que representa uma propagação dos campos do estado de vácuo, até a interação e de volta para o vácuo.

4.3 Expansão perturbativa e o propagador de Feynman

Queremos agora, calcular o propagador

$$S(x-y)_{\alpha\beta} = i\langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle. \quad (4.24)$$

Chamado **propagador de Feynman**. Para calcular (4.24) sabemos que o ordenamento normal nos permite reescrever

$$T \{ \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \} = \theta(x^0 - y^0) \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\Psi}_\beta(y) \Psi_\alpha(x), \quad (4.25)$$

onde θ é a função degrau. A partir das equações do campo de Dirac (3.4) e (3.5) podemos reescrever o termo a esquerda do lado direito da equação (4.25) como

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) | 0 \rangle &= \sum_{s,s'} \int \frac{1}{(2\pi)^6 2E_p} e^{ipx} e^{-ip'y} u^s(p)_\alpha \bar{u}^{s'}(p')_\beta \langle 0 | a_{s,p} a_{s',p'}^\dagger | 0 \rangle d^3 p d^3 p' = \\ &= \sum_{s,s'} \int \frac{1}{(2\pi)^6 2E_p} e^{ipx} e^{-ip'y} u^s(p)_\alpha \bar{u}^{s'}(p')_\beta (2\pi)^3 \delta^3(p - p') 2E_p \delta_{ss'} d^3 p d^3 p' = \\ &= \sum_s \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ip(x-y)} u^s(p)_\alpha \bar{u}^s(p)_\beta d^3 p = \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ip(x-y)} (-\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta} d^3 p, \end{aligned} \quad (4.26)$$

e, para o termo da esquerda do lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\Psi}_\beta(y) \Psi_\alpha(x) | 0 \rangle &= \sum_{s,s'} \int \frac{1}{(2\pi)^6 2E_p} e^{-ipx} e^{ip'y} v^s(p)_\alpha \bar{v}^{s'}(p')_\beta \langle 0 | b_{s,p} b_{s',p'}^\dagger | 0 \rangle d^3 p d^3 p' = \\ &= \sum_{s,s'} \int \frac{1}{(2\pi)^6 2E_p} e^{-ipx} e^{ip'y} v^s(p)_\alpha \bar{v}^{s'}(p')_\beta (2\pi)^3 \delta^3(p - p') 2E_p \delta_{ss'} d^3 p d^3 p' = \\ &= \sum_s \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} v^s(p)_\alpha \bar{v}^s(p)_\beta d^3 p = \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} (-\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha\beta} d^3 p, \end{aligned} \quad (4.27)$$

juntando as equações (4.26) e (4.27) na equação (4.25), adquirimos

$$\begin{aligned} S(x-y)_{\alpha\beta} &= i\theta(x^0 - y^0) \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ip(x-y)} (-\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta} d^3 p - \\ &- i\theta(y^0 - x^0) \int \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-ip(x-y)} (-\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha\beta} d^3 p. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Agora, utilizando a forma integral da função degrau θ (BERG, 1936),

$$\theta(x^0 - y^0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{\tau - i\epsilon} e^{i(x^0 - y^0)\tau} d\tau. \quad (4.29)$$

Podemos reescrever (4.28) como

$$S(x - y)_{\alpha\beta} = \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} d^4 p. \quad (4.30)$$

É interessante notar que $S(x - y)_{\alpha\beta}$ é a função de Green do operador de Dirac¹.

$$\begin{aligned} (-\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} S(x - y)_{\beta\gamma} &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta} (-\gamma^\mu p_\mu + m)_{\beta\gamma}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} d^4 p = \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{(p^2 + m^2) \delta_{\alpha\gamma}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} d^4 p = \\ &= \delta^4(x - y) \delta_{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} S(x - y)_{\alpha\beta} (-\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\beta\gamma} &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{(-\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu p_\mu + m)_{\beta\gamma}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} d^4 p = \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{(p^2 + m^2) \delta_{\alpha\gamma}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} d^4 p = \\ &= \delta^4(x - y) \delta_{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

O propagador de Feynman age no campo realizando a propagação dele do estado $|i\rangle$ até o estado $|f\rangle$, ele será essencial para o desenvolvimento das integrais de Feynman, já que podemos interpretar o propagador $S(x - y)$ como uma linha reta no qual a partícula do campo no qual o propagador atua simplesmente sai do ponto x e vai até o ponto y . É claro que, nessa visão, estamos representando um campo livre, isto é, sem interação, para obter os diagramas nos quais vértices de interação aparecem precisamos considerar as perturbações no campo geradas pela interação.

Em teoria de perturbação, como já dito, estamos interessados na interação decorrente da perturbação. Assim, definimos o campo de interação $\Psi_I(\vec{x}, t)$ dado pela evolução temporal do campo $\Psi_I(\vec{x}, t_0)$

$$\Psi_I(\vec{x}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} \Psi_I(\vec{x}, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (4.33)$$

¹ Mais sobre a função de Green pode ser visto em (HASSANI, 2013) e (FOLLAND, 2009)

Esta é chamada de representação de interação, onde o campo Ψ_I evolui com a hamiltoniana livre. Queremos agora ser capazes de representar o campo de Heisenberg Ψ em termos do campo de interação Ψ_I , seja $\Psi(\vec{x}, t_0)$ o campo de Heisenberg no instante inicial t_0 , consideremos que o campo de interação $\Psi_I(\vec{x}, t_0)$ seja igual ao campo total de Heisenberg. Portanto, definindo $t - t_0 = \tau$

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= e^{iH\tau}\Psi(\vec{x}, t_0)e^{-iH\tau} = \\ &= e^{iH\tau}e^{-iH_0\tau} [e^{iH_0\tau}\Psi(\vec{x}, t_0)e^{-iH_0\tau}] e^{iH_0\tau}e^{-iH\tau} = \\ &= e^{iH\tau}e^{-iH_0\tau}\Psi_I(\vec{x}, t_0)e^{iH_0\tau}e^{-iH\tau}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Definimos então o operador de evolução temporal, propagador como

$$U(t, t_0) = e^{iH_0\tau}e^{-iH\tau},\tag{4.35}$$

e assim, reescrevemos (a partir daqui iremos reescrever equações muitas vezes, então o leitor deve ter paciência e fé que a resposta chegará)

$$\Psi(\vec{x}, t) = U^\dagger(t, t_0)\Psi_I(\vec{x}, t_0)U(t, t_0).\tag{4.36}$$

É interessante notar que:

$$i\frac{\partial U}{\partial t} = e^{iH_0\tau}(H - H_0)e^{-iH\tau} = e^{iH_0\tau}H_{int}e^{-iH_0\tau}U(t, t_0),\tag{4.37}$$

a solução de (4.37) é dada por

$$U(t, t_0) = T \left\{ e^{-i\int_{t_0}^t H_I(t')dt'} \right\},\tag{4.38}$$

onde, definimos

$$H_I = e^{iH_0\tau}H_{int}e^{-iH_0\tau}.\tag{4.39}$$

Nossa tarefa agora esta em conseguir encontrar uma forma de calcular

$$\langle 0 | \Psi(x_1)\Psi(x_2)\cdots\Psi(x_n) | 0 \rangle,\tag{4.40}$$

fazendo uso de (4.36), reescrevemos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \left[U^\dagger(t_1, t_0) \Psi_I(x_1) U(t_1, t_0) \right] \left[U^\dagger(t_2, t_0) \Psi_I(x_2) U(t_2, t_0) \right] \cdots \\ \cdots \left[U^\dagger(t_n, t_0) \Psi_I(x_n) U(t_n, t_0) \right] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Note que $U^\dagger(t_1, t_0) = U(t_0, t_1)$ e $U(t_1, t_0)U(t_0, t_2) = U(t_1, t_2)$ e com estas identidades podemos reescrever mais uma vez (4.41)

$$\begin{aligned} \langle 0 | U^\dagger(t_1, t_0) \Psi_I(x_1) U(t_1, t_2) \Psi_I(x_2) U(t_2, t_3) \cdots \\ \cdots U(t_{n-1}, t_n) \Psi_I(x_n) U(t_n, t_0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Definindo agora um tempo $t \gg t_1 > t_2 > \cdots > t_n \gg -t$, podemos reescrever $U(t_n, t_0) = U(t_n, -t)U(-t, t_0)$ e analogamente para $U^\dagger(t_1, t_0)$ e com isso escrever (4.42) como

$$\begin{aligned} \langle 0 | U^\dagger(t, t_0) [U(t, t_1) \Psi_I(x_1) U(t_1, t_2) \Psi_I(x_2) U(t_2, t_3) \cdots \\ \cdots U(t_{n-1}, t_n) \Psi_I(x_n) U(t_n, -t)] U(-t, t_0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Podemos combinar os propagadores em um único propagador de $U(t, -t)$ e escrever

$$\langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \left\{ \Psi_I(x_1) \Psi_I(x_2) \cdots \Psi_I(x_n) e^{-i \int_{-t}^t H_I(t') dt'} \right\} U(-t, t_0) | 0 \rangle, \quad (4.44)$$

o que é válido para um t_0 arbitrário. Vamos tomar agora $t_0 = -t$ e fazer $t \rightarrow \infty$. Assim, o termo $\langle 0 | U^\dagger(\infty, -\infty)$ é o hermitiano de $U(\infty, -\infty) | 0 \rangle$ que nada mais é do que a evolução do vácuo do tempo $-\infty$ até ∞ , o que fisicamente dará o mesmo estado se o vácuo for estável, assim, podemos representar isso como um fator de fase complexa no estado, uma vez que isso não mudará a representação física dele.

$$U(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{i\alpha} | 0 \rangle, \quad (4.45)$$

onde,

$$e^{i\alpha} = \langle 0 | T \left\{ e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(t') dt'} \right\} | 0 \rangle. \quad (4.46)$$

E assim, finalmente chegamos à expressão final para (4.40)

$$\langle 0|T\{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\cdots\Psi(x_n)\}|0\rangle = \frac{\langle 0|T\{\Psi_I(x_1)\Psi_I(x_2)\cdots\Psi_I(x_n)e^{-i\int\mathcal{H}_I d^4x}\}|0\rangle}{\langle 0|T\{e^{-i\int\mathcal{H}_I d^4x}\}|0\rangle}. \quad (4.47)$$

O lado esquerdo é a função de Green que entra na redução LSZ, enquanto que o lado direito nos dá uma forma de calcular ela em termos dos campos Ψ_I

4.4 Diagramas de Feynman

Claro que, podemos ter qualquer situação com mais do que duas partículas participando, nesse caso, o valor esperado do produto-T dos campos no vácuo é dado como

$$\langle 0|T\{\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_n)\}|0\rangle. \quad (4.48)$$

Esse cálculo pode ser bem mais complicado, felizmente o teorema de Wick nos fornece uma forma de expressar o produto-T em (4.48) em termos de propagadores de Feynman e ordenamentos normais. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em (PESKIN, 2018). O teorema diz que o produto-T $T\{\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_n)\}$ como o ordenamento normal $:\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_n):$ somado de todas as combinações possíveis do ordenamento normal com contrações dos campos, onde a contração dos campos $\Psi(x_1)$, $\Psi(x_2)$ gera o propagador de Feynman $S(x_1 - x_2)$. Por exemplo,

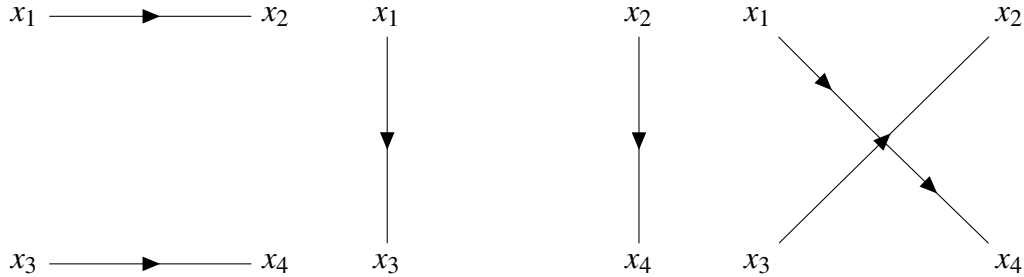
$$\begin{aligned} T\{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_3)\Psi(x_4)\} = & :\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_3)\Psi(x_4): + \\ & + S(x_1 - x_2) : \Psi(x_3)\Psi(x_4) : + S(x_1 - x_3) : \Psi(x_2)\Psi(x_4) : + S(x_1 - x_4) : \Psi(x_2)\Psi(x_3) : + \\ & + S(x_2 - x_3) : \Psi(x_1)\Psi(x_4) : + S(x_2 - x_4) : \Psi(x_1)\Psi(x_3) : + S(x_3 - x_4) : \Psi(x_1)\Psi(x_2) : + \\ & + S(x_1 - x_2)S(x_3 - x_4) + S(x_1 - x_3)S(x_2 - x_4) + S(x_1 - x_4)S(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Quando tiramos o valor esperado no vácuo, todos os termos no ordenamento normal dão zero enquanto os campos contraídos, vulgo propagadores de Feynman, sobrevivem. Assim

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_3)\Psi(x_4)\}|0\rangle = & S(x_1 - x_2)S(x_3 - x_4) + S(x_1 - x_3)S(x_2 - x_4) + \\ & + S(x_1 - x_4)S(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (4.50)$$

A interpretação física dessa equação, como foi discutido no final da sessão anterior, é que o propagador $S(x_i - x_j)$ é a amplitude de propagação da partícula no espaço do ponto x_i para o ponto x_j , assim a equação (4.50) representa uma combinação de 3 casos em que: uma

partícula sai do ponto x_1 para x_2 enquanto outra sai de x_3 para x_4 , ou, uma partícula sai de x_1 para x_3 enquanto outra sai de x_2 para x_4 , ou, uma partícula sai de x_1 para x_4 e outra de x_2 para x_3 . Podemos representar esquematicamente os diagramas de Feynman dessas propagações como



Note que, nestes casos, não existe interação nenhuma ocorrendo entre as duas partículas, mesmo no terceiro diagrama, elas se cruzam mas não interagem entre si, ou seja, não há vértices no diagrama. Essa situação representa a propagação de um campo livre, ou seja, duas partículas são criadas em alguns pontos no espaço, se propagam sem interagir e são aniquiladas em seguida. A amplitude de total desse processo é a soma das 3 possibilidades de como isso pode ocorrer.

Estamos interessados agora em representar vértices de interação, isso ocorrerá se mais de um campo estiver no mesmo ponto no espaço que outro. Isso é consequência da localidade da teoria, uma interação só ocorre quando duas partículas se encontram no mesmo ponto do espaço, sejam elas férmions ou bósons. Para observar estes casos, expandimos a exponencial (4.47) em termos de H_I .

Como exemplo de uma diagrama envolvendo interações, consideramos o espalhamento $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, cuja hamiltoniana de interação é dada por (SCHWARTZ, 2014)

$$H_I = \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\Psi(x), \quad (4.51)$$

onde A_μ é o campo vetorial não massivo que descreve o fóton (RYDER, 1996). Assim, fazendo a expansão perturbativa, o termo que domina a expansão é o de ordem 2²

$$-\frac{i^2}{2} \int (\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\Psi(x)) (\bar{\Psi}(y)\gamma^\nu A_\nu\Psi(y)) d^4x d^4y, \quad (4.52)$$

e a interação fica sendo descrita por

$$-\frac{i^2}{2} \int \langle 0|T \{ \Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_3)\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_4) (\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\Psi(x)) (\bar{\Psi}(y)\gamma^\nu A_\nu\Psi(y)) \} |0\rangle d^4x d^4y. \quad (4.53)$$

² O primeiro termo da expansão nos resulta apenas no vértice de interação fundamental da QED encontrado no apêndice C.

Os termos dentro dos maiores parenteses no produto-T sofrem a contração dos campos, isto é, estamos apenas explicitando que os produtos são tomados apenas com os termos dentro dos parênteses. Escrevemos então

$$-\frac{i^2}{2}\gamma_{j_1 j_2}^\mu \gamma_{j_3 j_4}^\nu \int \langle 0 | T \{ \Psi_{i_1}(x_1) \bar{\Psi}_{i_3}(x_3) \Psi_{i_2}(x_2) \Psi_{i_4}(x_4) \bar{\Psi}_{j_1}(x) A^\mu \times \Psi_{j_2}(x) \bar{\Psi}_{j_3}(y) A^\nu \Psi_{j_4}(y) \} | 0 \rangle d^4 x d^4 y. \quad (4.54)$$

Agora precisamos realizar as contrações do campo, isto é, criar campos no vácuo e aniquila-los, onde deixamos os campos que aniquilam partículas ao lado dos que criam partículas.

$$-\frac{i^2}{2}\gamma_{j_1 j_2}^\mu \gamma_{j_3 j_4}^\nu \int \langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \Psi_{i_1}(x_1) \bar{\Psi}_{j_1}(x) \Psi_{j_2}(x) \Psi_{i_3}(x_3) \Psi_{i_2}(x_2) \times \bar{\Psi}_{j_3}(y) \Psi_{j_4}(y) \Psi_{i_4}(x_4) \} | 0 \rangle d^4 x d^4 y. \quad (4.55)$$

Aplicando o teorema de Wick, vemos que os campos A geram um fóton na posição x que se propaga até a posição y , um elétron em cima é gerado na posição x_1 e se propaga até a posição x onde é aniquilado, da posição x um elétron é gerado e se propaga até x_3 , e a mesma lógica para o elétron de baixo. Fisicamente temos uma descrição na qual dois elétrons se propagando, interagem pela troca de um fóton e são espalhados, o que fica mais fácil de ver com o desenho do diagrama resultante dessa interação.

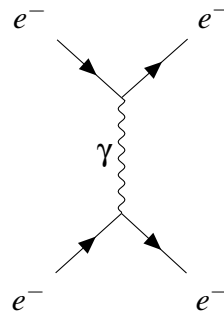


Figura 5 – Diagrama de um dos possíveis canais de interação para o espalhamento elétron-elétron.

Este único diagrama não representa a interação total, isto é, única forma como elétrons podem interagir, a elaboração da interação via diagramas de Feynman é mais complicada do que isso, essa interação descreve apenas um dois possíveis canais no qual o espalhamento pode ocorrer, a descrição mais completa do espalhamento é dada pela soma de todos os canais de interação possíveis (SCHWARTZ, 2014) e (PESKIN, 2018). Outra conta que deve ser ressaltada é a direção do tempo no diagrama, note que podemos definir a seta do tempo na vertical

ou na horizontal, neste diagrama eu uso a direção temporal na horizontal, da esquerda para a direita \rightarrow , se tivéssemos definido o tempo na vertical para cima, veríamos que iríamos precisar definir pósitrons como sendo elétrons voltando no tempo, o que é uma interpretação que faz total sentido como mostrado por Wheeler em 1941, note que esse procedimento é equivalente a rotacionar o diagrama no sentido anti-horário.

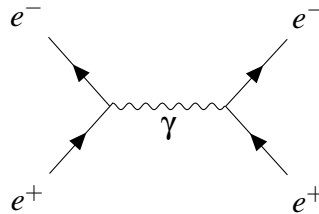


Figura 6 – Processo de espalhamento elétron-pósitron.

Uma discussão mais detalhada sobre interações e diagramas de Feynman é feita no apêndice D. Com este formalismo e desenvolvimento, podemos escrever as regras de Feynman para construção de diagramas de Feynman, o que facilitará muito os resultados, ao invés de calcular expansões perturbativas da Hamiltoniana de interação e encontrar manualmente os termos da expansão e encontrar os canais de interação, iremos aplicar as regras de Feynman diretamente e representar o diagrama de uma interação. Também devemos lembrar que podemos representar diagramas de Feynman no espaço dos momentos ou no espaço das posições, no espaço dos momentos, relacionamos os momentos das partículas incidentes com as partículas de saída e as mediadoras, já no espaço das posições, relacionamos as posições de propagação de cada partícula constituinte do diagrama, dessa forma, teremos regras de Feynman para as interações no espaço dos momentos e no espaço das posições. Além do mais, devemos lembrar que as regras de Feynman são diferentes para campos spinoriais, como o de Dirac, campos vetoriais, como os bósons de calibre, e campos escalares, como os bósons escalares. As regras de Feynman no espaço das posições, são

1. Começando com os pontos x_i em que cada propagador é considerado, desenhamos linhas entre estes pontos seguindo os propagadores.
2. Uma linha pode se conectar a outra linha, devido ao diagrama de Feynman de dois pontos que se conectam, ou ela pode se dividir em outras linhas devido à interação. A divisão dá origem a novos vértices proporcionais ao termo $\mathcal{L}'_{int}(\Psi)$ vezes i e linhas correspondem aos campos $\mathcal{L}'_{int}(\Psi)$. Onde $\mathcal{L}'_{int}(\Psi) = d\mathcal{L}_{int}(\Psi)/d\Psi$
3. Para qualquer ordem da expansão perturbativa, o diagrama resultado é uma soma dos diagramas com as linhas conectadas, integradas sobre as posições dos vértices internos.

Enquanto isso, as regras de Feynman no espaço dos momentos, são dadas a seguir

1. Linhas internas, isto é, aquelas que possuem início e fim dentro do próprio diagrama (como o caso do fóton na imagem 5) possuem um propagador do tipo livre.
2. Vértices vem das interações na Lagrangiana, multiplicados pela constante de acoplamento vezes i .
3. Linhas conectadas a pontos externos não possuem propagadores.
4. O momento é conservado em cada vértice.
5. Integra-se sobre todos os quadri-momentos.
6. Realiza-se uma soma de todos os possíveis diagramas.

Estas regras facilitam muito a montagem de cada diagrama de interação e serão usadas daqui para frente na teste final para a descrição das interações eletrofracas que compõem as interações envolvendo neutrinos. Com isso, discutiremos como neutrinos interagem com a matéria e quais tipos de interações e decaimentos são capazes de gerar neutrinos, para com isso, explicar como neutrinos podem ser gerados em processos astrofísicos como supernovas. Não abordaremos aqui a propagação dos neutrinos no espaço, que se relaciona com o famoso efeito de oscilação de neutrinos, descoberto experimentalmente pelo *Subdury Neutrino Observatory* em neutrinos vindos do sol (COLLABORATION et al., 2001) e pelo Super-Kamiokande em neutrinos produzidos na atmosfera por interações de raios cósmicos (FUKUDA et al., 1998). Por fim, promoveremos o processo de detecção destes neutrinos aqui na Terra, utilizando dados e simulações do *Deep Underground Neutrino Detector* (DUNE) para correlacionar a detecção de neutrinos com o fenômeno de supernova.

5 Interações Eletrofracas

Afim de finalizar o entendimento teórico básico de partículas elementares, para então aplicarmos este entendimento ao fenômeno de supernovas e de detecção, visitamos a formulação da teoria eletrofraca. Uma vez que os neutrinos interagem apenas via interações eletrofracas, não precisamos nos preocupar em aspectos relacionados às interações fortes descritas pela cromodinâmica quântica. Além disso, não nos preocuparemos aqui em aplicações dessa teoria para interações que não envolvam neutrinos.

A interação fraca é intermediada por três diferentes tipos de bósons vetoriais (W^\pm e Z^0), assim como o espalhamento elétron-elétron no capítulo anterior era intermediado por um fóton, representado pelo campo vetorial A_μ . Entretanto, estes bósons vetoriais se diferem do fóton por possuírem massa.

$$M_W = 80.4\text{GeV}$$

$$M_Z = 91.2\text{GeV}$$

O alto valor nestas massas (aproximadamente 160000 vezes maior que a massa do elétron para o bóson W^\pm) apresenta uma consequência para as interações mediadas por elas, uma vez que o alcance de uma força é dado pelo comprimento de onda Compton das partículas que a transmitem (MARTIN; SHAW, 2017). Como consequência disso, o alcance das interações fracas é da ordem de 10^{-18} m, e em energias mais baixas a interação fraca pode ser considerada de alcance zero, ou seja, consideramos que a interação ocorre diretamente entre as partículas envolvidas, sem a presença de um bóson intermediador. Este regime de baixas energias é conhecido como regime de Fermi. Outro detalhe a ser observado é que em baixas energias a interação eletrofraca pode ser separada em interações eletromagnéticas e interações fracas.

5.1 Teoria de Calibre

A princípio, a primeira tentativa de se desenvolver uma teoria que descrevesse uma força nova mediada por bósons vetoriais foi a teoria do bóson intermediário (IVB), introduzindo a quantização de um campo vetorial massivo nas interações para representar os bósons mediadores desta nova força **E**. Entretanto, esta teoria se mostrou falha em regimes de maior energia. Inicialmente descrita por Fermi em 1934 (FERMI, 1934) em sua proposta para o decaimento beta¹

¹ Representado por $n \rightarrow pe\bar{\nu}$ na notação usada em física de partículas.

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \quad (5.1)$$

a força fraca a princípio parecia conter apenas interações onde uma troca de carga ocorria, como no caso do decaimento beta, entretanto em 1973, as interações não envolvendo troca de carga, conhecidas como interações de corrente neutra, foram descobertas na *European Organization for Nuclear Research (CERN)* (HASERT et al., 1973). Esta descoberta mostrava a existência de um bóson neutro participando das interações fracas, tornando o modelo construído por Fermi incompleto.

Afim de descrever de maneira completa as interações fracas, muitos físicos buscaram imitar o sucesso do desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica (QED), que trouxe uma das teorias físicas mais bem acuradas da história. Para isso, revemos brevemente o trajeto da QED sem entrar em muitos detalhes pois um tratamento completo desta teoria foge o objetivo deste trabalho.

5.1.1 Desenvolvimento da QED

A Lagrangiana livre da QED²

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}_e(x) (i\gamma^\mu \partial^\mu - m_e) \Psi_e(x), \quad (5.2)$$

é invariante sobre transformações de fase globais

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \Psi(x)e^{-i\alpha}, \quad (5.3)$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\Psi}(x), \quad (5.4)$$

e leva à conservação da corrente eletromagnética

$$s^\mu = q\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x), \quad (5.5)$$

que consequentemente implica na conservação da carga elétrica

$$Q = q \int \Psi^\dagger(x)\Psi(x)d^3x. \quad (5.6)$$

² O subíndice e indica que este campo é o campo fermiônico do elétron

Em seguida, para a validade da teoria, estas transformações de fase globais são generalizadas para transformações de fase locais, isto é, agora as transformações dependem da posição.

$$e^{\pm i\alpha} \rightarrow e^{\pm i\alpha f(x)} \quad (5.7)$$

sendo $f(x)$ arbitrário. Devido ao termo de derivada ∂_μ na Lagrangiana livre (5.2) esta função irá adicionar um termo a mais na Lagrangiana após esta transformação local

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + q\bar{\Psi}_e(x)\gamma^\mu\Psi_e(x)\partial_\mu f(x). \quad (5.8)$$

Esta não invariância nos sugere a inserção de um novo termo em \mathcal{L}_0 para se manter a invariância. Para isso, é primeiro introduzido a derivada covariante

$$D^\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (5.9)$$

onde o campo eletromagnético $A_\mu(x)$ se transforma como

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x). \quad (5.10)$$

A derivada covariante possui a interessante propriedade onde sobre as transformações (5.7) e (5.10) ela se transforma da mesma forma que um campo fermiônico

$$D^\mu\Psi(x) \rightarrow e^{iqf(x)}D^\mu\Psi(x). \quad (5.11)$$

Assim, se substituirmos ∂_μ por D^μ em (5.2) obtemos a invariância desejada.

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}_e(x)(i\gamma^\mu D^\mu - m_e)\Psi_e(x) = \mathcal{L}_0 - q\bar{\Psi}_e(x)\gamma^\mu\Psi_e(x)A_\mu(x) \quad (5.12)$$

Esta lagrangiana contém a interação fundamental da QED em seu segundo termo, note que é o mesmo termo de (4.51) com o sinal trocado e o fator q multiplicando, isso porque em (4.51) a interação está expressa em termos da Hamiltoniana, o fator q é a constante de acoplamento da teoria, ou seja, a grandeza que une as interações na teoria.

Este procedimento levou ao enorme sucesso da QED em descrever fenômenos eletromagnéticos em energias mais altas como o *Bremstrahlung*. Seguiremos esta mesma lógica

para desenvolver a teoria de calibre das interações fracas. O nome calibre, vem justamente do papel que o campo A_μ faz de calibrar a teoria na invariância correta, no caso da QED, este campo é o campo vetorial não massivo que gera o fóton, ou seja, o fóton é o bóson de calibre da QED.

Antes de começar, é interessante discutir brevemente a interpretação física das transformações de fase, para que o desenvolvimento da teoria não pareça simplesmente movido por razões matemáticas sem interpretação no mundo real. As transformações de fases, na teoria quântica de campos, resultam na conservação da carga para um determinado campo, descrito pela identidade de Ward-Takahashi (WARD, 1950; TAKAHASHI, 1957). A conservação de uma Lagrangiana por uma transformação do tipo U(1) resulta na conservação da carga, desta forma, um bom método para se iniciar o desenvolvimento da teoria é investigando a invariância da Lagrangiana por transformações de fase.

Para iniciar a construção de uma teoria de calibre para a força fraca, encontramos primeiro o conjunto de transformações globais que deixam a Lagrangiana livre leptônica invariante. A princípio, assumimos estes léptons como sendo não-massivos, com isso, a Lagrangiana livre é escrita, em termos dos campos leptônicos carregados e os campos dos neutrinos sem carga, na forma

$$\mathcal{L}_0 = i \left(\bar{\Psi}_l(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_l(x) + \bar{\Psi}_{\nu_l}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_{\nu_l}(x) \right). \quad (5.13)$$

Como já vimos no capítulo 2, podemos decompor o spinor fermiônico em componentes destras e canhotas (2.5). Reescrevendo a Lagrangiana nesta forma bilinear temos

$$\mathcal{L}_0 = i \left(\bar{l}^L(x) \gamma^\mu \partial_\mu l^L(x) + \bar{\Psi}_l^R(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_l^R(x) + \bar{\Psi}_{\nu_l}^R(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_{\nu_l}^R(x) \right) \quad (5.14)$$

onde

$$l^L(x) = l^L(x) = \begin{pmatrix} \Psi_l^L(x) \\ \Psi_{\nu_l}^L(x) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

é um dubleto correspondendo às componentes canhotas dos léptons (o mesmo válido para $\bar{l}^L(x)$), nesta forma de dubleto, ambas as componentes recebem a mesma hipercarga fraca³. Outra razão para a escolha deste dubleto para as componentes canhotas dos léptons é dada experimentalmente pela confirmação de que somente partículas com quiralidade canhota participam das interações fracas, sugerindo que tanto neutrinos canhotos como léptons canhotos

³ A hipercarga fraca $Y = 2(Q - T_3)$, sendo T_3 o isospin fraco é obtida ao se tentar montar uma álgebra fechada entre a carga elétrica Q e o isospin fraco dos férmions T_3 . Este procedimento não será abordado neste trabalho porém pode ser encontrado em detalhes em (CHENG; LI; CHENG, 1984)

compartilham de um número quântico em comum, sendo este número quântico a hipercarga fraca. O leitor pode estar inclinado a pensar que podemos então excluir as componentes destras da Lagrangiana (5.14) e facilitar as contas. Entretanto, veremos adiante que a força fraca se unificará com a força eletromagnética, sendo que esta não faz distinção entre quiralidade das partículas envolvidas.

A forma bilinear das componentes canhotas leva a diferentes propriedades de transformação para estes campos em relação às componentes destras. Vale ressaltar que esta forma bilinear não é um spinor, $\Psi_l(x)$ é um spinor e está associado a simetrias no espaço-tempo, como discutido no capítulo 1 sobre teoria de grupos, enquanto que $l^L(x)$ é uma forma bilinear associada a simetrias internas na interação. Um está associado ao espaço, e outro à forma como as partículas interagem no espaço.

Para as formas bilineares $l^L(x)$ e $\bar{l}^L(x)$ introduzimos as matrizes τ_1, τ_2, τ_3 que satisfazem as relações de comutação $[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k$, onde o operador $U(\alpha) = e^{i\alpha_j\tau_j/2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é unitário e o conjunto de transformações

$$l^L(x) \rightarrow l'^L(x) = U(\alpha)l^L(x) \quad (5.16)$$

$$\bar{l}^L(x) \rightarrow \bar{l}'^L(x) = \bar{l}^L(x)U^\dagger(\alpha) \quad (5.17)$$

deixam o termo $i\bar{l}^L(x)\gamma^\mu\partial_\mu l^L(x)$ em (5.14) invariante. As matrizes que satisfazem estas relações são justamente as matrizes de Pauli e estas transformações são típicas do grupo SU(2). Portanto, os campos $l^L(x)$ obedecem à álgebra de SU(2), logo, SU(2) é o primeiro grupo que encontramos por trás da teoria fraca. Estes dubletos são chamados de isospin fraco e o conjunto de transformações globais que deixam as componentes canhotas dos léptons invariante é o grupo SU(2).

Voltamos nossa atenção agora para as componentes destras. Faremos com que elas se transformem como escalares sobre alguma transformação de SU(2), uma vez que não são formas bilineares.

$$\Psi_l^R(x) \rightarrow \Psi_l'^R(x) = \Psi_l^R(x) \quad (5.18)$$

$$\bar{\Psi}_l^R(x) \rightarrow \bar{\Psi}_l'^R(x) = \bar{\Psi}_l^R(x) \quad (5.19)$$

$$\Psi_{\nu_l}^R(x) \rightarrow \Psi_{\nu_l}'^R(x) = \Psi_{\nu_l}^R(x) \quad (5.20)$$

$$\bar{\Psi}_{\nu_l}^R(x) \rightarrow \bar{\Psi}_{\nu_l}'^R(x) = \bar{\Psi}_{\nu_l}^R(x) \quad (5.21)$$

As transformações de SU(2) deixam a Lagrangiana \mathcal{L}_0 invariante. No caso de transformações infinitesimais, expandimos a exponencial em primeira ordem, deixando (5.16) e (5.17) na forma

$$l^L(x) \rightarrow l'^L(x) = \left(1 + \frac{i\alpha_j \tau_j}{2}\right) l^L(x) \quad (5.22)$$

$$\bar{l}^L(x) \rightarrow \bar{l}'^L(x) = \left(1 - \frac{i\alpha_j \tau_j}{2}\right) \bar{l}^L(x) \quad (5.23)$$

e, para os campos destros, as transformações não mudam, uma vez que são escalares. Esta forma de expressar a lei de transformações para os campos canhotos nos leva á três correntes carregadas

$$J_i^\alpha(x) = \frac{1}{2} \bar{l}^L(x) \gamma^\alpha \tau_i l^L(x), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.24)$$

chamadas correntes de isospin fraco. Pelo teorema de Noether (Apêndice B), a existência de correntes conservadas implica na conservação de cargas associadas a estas correntes por

$$I_i^W = \int J_i^0(x) d^3x = \frac{1}{2} \int l^{L\dagger}(x) \tau_i l^L(x) d^3x \quad (5.25)$$

chamadas cargas de isospin fraco. As correntes leptônicas obtidas pela teoria IVB, podem ser escritas a partir das correntes de isospin

$$J^\alpha(x) = 2(J_1^\alpha(x) - iJ_2^\alpha(x)) = \bar{\Psi}_l(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Psi_{\nu_l} \quad (5.26)$$

$$J^{\alpha\dagger}(x) = 2(J_1^\alpha(x) + iJ_2^\alpha(x)) = \bar{\Psi}_{\nu_l}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \Psi_l. \quad (5.27)$$

Estas correntes são todas carregadas, uma vez que ela envolve a presença de campos de cargas diferentes, isto é, a interação descrita por estas correntes deve transmitir carga também. Entretanto, temos ainda a corrente de isospin neutra que só envolve campos neutros ou de cargas iguais, como a corrente eletromagnética por exemplo (5.5).

$$J_3^\alpha(x) = \frac{1}{2} \bar{l}^L(x) \gamma^\alpha \tau_3 l^L(x) = -\frac{1}{2} \left(\bar{\Psi}_{\nu_l}^L(x) \gamma^\alpha \Psi_{\nu_l}^L(x) - \bar{\Psi}_l^L(x) \gamma^\alpha \Psi_l^L(x) \right) \quad (5.28)$$

O ultimo termo $\bar{\Psi}_l^L(x) \gamma^\alpha \Psi_l^L(x)$ parece a corrente eletromagnética, exceto por um fator constante, isso já nos sugere que mais adiante, as duas teorias estarão conectadas.

Seguindo adiante, podemos relacionara a corrente neutra da interação fraca com a corrente eletromagnética através da corrente de hipercarga fraca, definida como

$$J_Y^\alpha(x) = \frac{s^\alpha(x)}{e} - J_3^\alpha(x) = -\frac{1}{2} \bar{l}^L(x) \gamma^\alpha l^L(x) - \bar{\Psi}_l^R(x) \gamma^\alpha \Psi_l^R(x) \quad (5.29)$$

Vemos que apesar das componentes destrás dos campos não entrarem nas interações fracas, ao introduzirmos uma forma de interação que envolve a força fraca e a força eletromagnética, os campos destrás participam dela pela parte eletromagnética. Além disso, esta corrente introduz a hipercarga fraca

$$Y = \int J_Y^0(x) d^3x = \frac{Q}{e} - I_3^W \quad (5.30)$$

Vamos determinar este valor de hipercarga e carga de isospin fraco para os léptons.

$$\tau_3 l^L(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\nu_l}^L \\ \Psi_l^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{\nu_l}^L \\ -\Psi_l^L \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Logo, I_3^W vale $1/2$ para ν_l canhoto e $-1/2$ para l canhoto. Enquanto que para os léptons destrás

$$I_3^W |l, R\rangle = I_3^W |\nu_l, R\rangle = 0, \quad (5.32)$$

ou seja, léptons destrás tem valor de isospin fraco igual a 0. Este resultado faz todo o sentido, uma vez que estes léptons não participam das interações fracas, não é esperado que eles possuam um valor de carga associada a este tipo de interação.

Os valores de hipercarga fraca dos léptons são

Tabela 1 – Valores de hipercarga fraca

lépton	hipercarga fraca
l^R	-2
ν_l^R	0
l^L	-1
ν_l^L	-1

Antes de continuar, é interessante parar e avaliar um pouco este resultado. Sabemos que o que determina a interação de uma partícula com a força eletromagnética é sua carga elétrica, da mesma forma, esperamos que a interação com a força fraca necessite de alguma carga específica. Esta carga é o isospin fraco, que acabamos de ver que somente os léptons canhotos possuem esta carga, o que reforça o que já vimos no início sobre somente léptons com quiralidade canhota participarem das interações fracas. Agora, quando iniciamos a introdução de uma teoria que unifique a força eletromagnética com a força fraca, vemos o surgimento de uma nova carga, a hipercarga fraca, que associa a carga elétrica e a carga de isospin das

partículas. E agora vemos que todos os léptons participam da interação eletrofraca, mesmo que não participem da parte fraca ou da parte eletromagnética especificamente, exceto o neutrino destro. O neutrino destro possui hipercarga fraca igual a 0, portanto, ele não sente a força fraca por ser destro e não sente a força eletromagnética por ser eletricamente neutro.

Estes neutrinos são os chamados neutrinos estéreis, que só interagem gravitacionalmente e portanto são quase impossíveis de detectar. Até hoje, nenhum neutrino destro já foi detectado no mundo. Atualmente este resultado é compreendido como a não existência do neutrino destro até onde sabemos, muitos autores discutem o problema se neutrinos destros realmente não existem, ou se apenas não interagem de forma que consigamos detectá-los ainda (CHENG; LI; CHENG, 1984) e (GIUNTI; KIM, 2007). Inclusive, os neutrinos estéreis (destros) são um dos candidatos à matéria escura (BOYARSKY et al., 2019) incluindo alguns modelos que buscam entender se neutrinos ativos (canhotos) podem oscilar para neutrinos estéreis. (JOHNS; FULLER, 2019).

Continuando na teoria eletrofraca, podemos notar que estes valores de hipercarga podem ser sumarizados na seguinte transformação de fase global

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\beta Y} \Psi, \quad (5.33)$$

onde aqui, Ψ pode ser qualquer campo leptônico, β é uma constante e Y é o valor de hipercarga do lépton. Estas transformações são parte do grupo $U(1)$. Assim, observamos que o conjunto de transformações $U(1)$ também deixam \mathcal{L}_0 invariante.

Nosso próximo passo é generalizar as transformações globais de $SU(2)$ e $U(1)$ para transformações locais. Veremos que para se manter a invariância nestes casos, teremos que introduzir bósons de calibre e interações da mesma forma como foi feita na QED.

Começamos com as transformações de $SU(2)$.

$$l^L(x) \rightarrow l'^L(x) = e^{ig\tau_j \omega_j(x)/2} l^L(x) \quad (5.34)$$

$$\bar{l}^L(x) \rightarrow \bar{l}'^L(x) = \bar{l}^L(x) e^{-ig\tau_j \omega_j(x)/2} \quad (5.35)$$

$$(5.36)$$

enquanto que os demais campos destros, por se transformarem como escalares, não sofrem alteração e $\omega_j(x)$ são funções arbitrárias e g é uma constante real.

Sobre estas transformações, o operador ∂ na lagrangiana \mathcal{L}_0 irá atuar em $\omega_j(x)$ e adicionar um termo a mais na lagrangiana, portanto, ela não é invariante ainda sobre estas transformações.

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}g\bar{l}^L(x)\tau_j\gamma^\mu\partial_\mu\omega_j l^L(x). \quad (5.37)$$

Assim como na QED, substituímos a derivada ∂_μ pela derivada covariante D^μ

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\tau_j \frac{W_j^\mu}{2}, \quad (5.38)$$

onde agora \mathcal{L}_0 se torna

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = i \left[\bar{l}^L(x)\gamma^\mu D^\mu l^L(x) + \bar{\Psi}_l^R(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_l^R(x) + \bar{\Psi}_{\nu_l}^R(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_{\nu_l}^R(x) \right]. \quad (5.39)$$

Tivemos que introduzir 3 novos campos de calibre $W_j^\mu(x)$ e para que a Lagrangiana \mathcal{L}_0 se mantenha invariante, além das transformações dos campos leptônicos, os campos bosônicos devem se transformar de acordo com

$$W_j^\mu(x) \rightarrow W_j'^\mu(x) = W_j^\mu(x) + \delta W_j^\mu(x), \quad (5.40)$$

de forma que a derivada covariante de $l^L(x)$ se transforma igual a $l^L(x)$

$$D^\mu l^L(x) \rightarrow e^{ig\tau_j\omega_j(x)/2} D^\mu l^L(x), \quad (5.41)$$

sendo análogo para $\bar{l}^L(x)$.

Nos voltamos agora para o grupo U(1), que resulta nas seguintes transformações de fase locais

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{ig'Yf(x)}\Psi(x) \quad (5.42)$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{-ig'Yf(x)}, \quad (5.43)$$

onde g' é uma constante real e $f(x)$ é uma função arbitrária, real e diferenciável. Novamente, para obter a invariância de fase local em \mathcal{L}_0 para estas transformações, introduzimos a derivada covariante para este caso

$$\partial_\mu\Psi(x) \rightarrow D^\mu\Psi(x) = [\partial^\mu + ig'YB^\mu(x)]\Psi(x), \quad (5.44)$$

e o novo campo de calibre de transforma como

$$B^\mu(x) \rightarrow B'^\mu(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu f(x). \quad (5.45)$$

Cada substituição gera uma lagrangiana invariante por transformações de um grupo, dessa forma, as duas transformações devem manter a lagrangiana totalmente invariante.

$$\mathcal{L}^L = i \left[\overline{l^L(x)} \gamma^\mu D^\mu l^L(x) + \overline{\Psi_l^R(x)} \gamma^\mu D_\mu \Psi_l^R(x) + \overline{\Psi_{\nu_l}^R(x)} \gamma^\mu D_\mu \Psi_{\nu_l}^R(x) \right]. \quad (5.46)$$

onde

$$D^\mu l^L(x) = \left[\partial^\mu + ig\tau_j \frac{W_j^\mu(x)}{2} - ig' \frac{B^\mu(x)}{2} \right] l^L(x) \quad (5.47)$$

$$D^\mu \Psi_l^R(x) = [\partial^\mu - ig' B^\mu(x)] \Psi_l^R(x) \quad (5.48)$$

$$D^\mu \Psi_{\nu_l}^R(x) = \partial^\mu \Psi_{\nu_l}^R(x) \quad (5.49)$$

Essa lagrangiana é dita invariante por $SU(2) \times U(1)$.

Podemos generalizar a derivada covariante também na forma

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\tau_j I_3^W W_j^\mu(x) - ig' Y B^\mu(x) \quad (5.50)$$

e assim, os casos mencionados acima são casos especiais para os valores de I_3^W e Y dos campos leptônicos na qual ela atua.

Podemos reescrever (5.46) como

$$\mathcal{L}^L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (5.51)$$

sendo que \mathcal{L}_0 é a parte da lagrangiana que representa os campos leptônicos livres e \mathcal{L}_I é a parte que representa a interação deles com os bósons de calibre via as correntes de isospin fraco e correntes de hipercarga fracas.

$$\mathcal{L}_I = -g J_i^\mu(x) W_{i_\mu}(x) - g' J_Y^\mu B_\mu(x) \quad (5.52)$$

Para obter uma interpretação melhor destas interações, vamos reescrever J_1^μ e J_2^μ em termos de J^μ e J^{μ^\dagger} . Além disso, introduzimos um novo campo de calibre não-hermitiano (a

não-hermeticidade do campo ficará clara mais para frente, porém, adiantando o resultado, isso resultará em um campo $W(x) \neq W^\dagger(x)$ que nos dará dois bósons de cargas opostas para este campo, os bósons W^+ e W^-).

$$W_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{1\mu}(x) - iW_{2\mu}(x)) \quad (5.53)$$

Com este campo, o somatório em i no primeiro termo de (5.52) assume a forma

$$\begin{aligned} -g \sum_{i=1}^2 J_i^\mu(x) W_{i\mu}(x) &= -g (J_1^\mu(x) W_{1\mu}(x) + J_2^\mu(x) W_{2\mu}(x)) = \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} (J^{\mu\dagger}(x) W_\mu(x) + J^\mu(x) W_\mu^\dagger(x)), \end{aligned} \quad (5.54)$$

para os dois primeiros termos do somatório. Para o terceiro termo do somatório e o último termo de (5.52) escrevemos $W_{3\mu}(x)$ e $B_\mu(x)$ como uma combinação linear de campos hermitianos $A_\mu(x)$ e $Z_\mu(x)$, definidos como

$$W_{3\mu}(x) = \cos(\theta_W) Z_\mu(x) + \sin(\theta_W) A_\mu \quad (5.55)$$

$$B_\mu(x) = -\sin(\theta_W) Z_\mu(x) + \cos(\theta_W) A_\mu(x), \quad (5.56)$$

o ângulo θ_W de mistura entre os campos é conhecido como o ângulo de mistura fraco, ou ângulo de Weinberg (WEINBERG, 1967). Destas equações (5.55) e (5.56) juntamente com (5.29), temos

$$\begin{aligned} -g J_3^\mu(x) W_{3\mu}(x) - g' J_Y^\mu(x) B_\mu(x) &= -\frac{g}{e} s^\mu(x) [-\sin(\theta_W) Z_\mu(x) + \cos(\theta_W) A_\mu(x)] - \\ - J_3^\mu(x) [g (\cos(\theta_W) Z_\mu(x) + \sin(\theta_W) A_\mu(x)) - g' (-\sin(\theta_W) Z_\mu(x) + \cos(\theta_W) A_\mu(x))] & . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Queremos agora que o campo $A_\mu(x)$ seja justamente o campo eletromagnético, acoplado com a carga elétrica pelo termo $-s^\mu(x) A_\mu(x)$. Para que isto aconteça, o coeficiente $J_3^\mu A_\mu(x)$ deve ser nulo e $s^\mu(x) A_\mu(x)$ deve ser -1. Dessa forma, devemos ter

$$g \sin(\theta_W) = g' \cos(\theta_W) = e. \quad (5.58)$$

Este resultado não é algo que deve ser passado batido, uma vez que ele nos permite relacionar as constantes g , g' e o ângulo de Weinberg com a carga fundamental do elétron, dando suporte para medidas experimentais da teoria.

Feito tudo isso, reescrevemos (5.52) como

$$\mathcal{L}_I = -s^\mu(x)A_\mu(x) - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[J^{\mu\dagger}(x)W_\mu(x) + J^\mu(x)W_\mu^\dagger(x) \right] - \frac{g}{\cos(\theta_W)} \left[J_3^\mu(x) - \sin^2(\theta_W) \frac{s^\mu(x)}{e} \right] Z_\mu(x). \quad (5.59)$$

O primeiro termo corresponde à interação eletromagnética presente na QED e agora presente na interação eletrofraca, o segundo termo é a interação de corrente carregada prevista pela teoria IVB se $G_W = g/2\sqrt{2}$, logo, os quantas do campo $W_\mu(x)$ são de fato os bósons W^\pm . O terceiro termo representa a interação de corrente neutra acoplada ao bóson vetorial Z^0 , o quanta do campo $Z_\mu(x)$. Experimentalmente $\sin(\theta_W) = 0.23122 \pm 0.00015$. Este resultado é fantástico, pois com ele, temos como determinar todas as constantes de acoplamento na teoria!

Mas a lagrangiana ainda não está completa. Até agora, nós descrevemos léptons livres e como eles interagem com os bósons. Agora, devemos ainda descrever como os bósons se comportam sem nenhum lépton por perto. E, claro que esta descrição deverá respeitar a invariância $SU(2) \times U(1)$.

Para o campo $B_\mu(x)$, a transformação $U(1)$ deste campo é igual à do campo eletromagnético $A_\mu(x)$, assim, construímos a lagrangiana livre deste campo igual à lagrangiana livre do campo eletromagnético.

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (5.60)$$

onde

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu. \quad (5.61)$$

Pela própria construção que fizemos de $B_\mu(x)$, sua transformação $SU(2)$ já deixa a lagrangiana invariante, pois lembre-se, $B_\mu(x)$ é introduzido justamente para se manter a invariância da lagrangiana da teoria, portanto, sua lagrangiana livre também deve por consequência ser invariante sobre a mesma transformação.

Para $W_i^\mu(x)$ a situação é mais complicada. A forma $F_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu(x) - \partial^\nu W_i^\mu(x)$ não é invariante por $W_i^\mu \rightarrow W_i^{\mu'} = W_i^\mu + \delta W_i^\mu$ devido ao termo $-g\epsilon_{ijk}\omega_j(x)W_k^\mu(x)$ que aparece em sua variação. Para se manter a invariância, adicionamos um termo extra

$$G_i^{\mu\nu} = F_i^{\mu\nu} + g\epsilon_{ijk}W_j^\mu(x)W_k^\nu(x), \quad (5.62)$$

com isso, a lagrangiana deste campo é $-1/4G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu}$. Por fim, a lagrangiana dos bósons livres fica escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} = \\ &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu} + g\epsilon_{ijk}W_{i\mu}(x)W_{j\nu}(x)\partial^\mu W_k^\nu(x) - \frac{1}{4}g^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}W_j^\mu(x)W_k^\nu(x)W_{l\mu}(x)W_{m\nu}(x).\end{aligned}\quad (5.63)$$

Os dois primeiros termos representam os campos bosônicos sem interação, já os dois últimos termos representam a interação dos bósons com eles mesmos. Se aplicarmos esta parte da lagrangiana na teoria de perturbação desenvolvida no capítulo 4 para os diagramas de Feynman, encontramos interações entre os bósons do tipo:



Figura 7 – Interações entre os bósons

Com isso, a lagrangiana final é finalmente escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_B. \quad (5.64)$$

Poderíamos então considerar a teoria completa. E de fato, matematicamente ela está completa, entretanto, ainda resta um problema físico nela. A questão massa nula dos léptons e bósons deve ser resolvida (lembre-se que no início de tudo supomos que os léptons não possuíam massa, afinal de contas, nada na descrição de seu campo impunha massa nas partículas).

5.2 Quebra Espontânea de Simetria

O problema da falta de massa nos léptons e bósons foi resolvido em 1964 por 3 grupos diferentes, Peter Higgs ([HIGGS, 1964](#)); Robert Brout e François Englert ([ENGLERT; BROUT, 1964](#)); e Gerald Guralnik, Carl Richard Hagen e Tom Kibble ([GURALNIK; HAGEN; KIBBLE, 1964](#)). Estes 3 grupos propuseram mecanismos no qual a simetria intrínseca da teoria era quebrada de forma espontânea no vácuo, isto é, no estado de menor energia possível para o campo. Esta quebra de simetria provocava o surgimento de massa para os bósons e os léptons. Mais tarde, após replicarmos aqui o modelo, discutiremos o que causa esta quebra de simetria e como a massa surge a partir dela.

A quebra espontânea de simetria é relevante apenas se o vácuo for não-único, o que significa que alguma grandeza do campo não desaparece no vácuo e não é invariante sobre as transformações de simetria da teoria. Esta grandeza não nula permite que nós caracterizemos algum vácuo específico como o estado fundamental. Em todos os 3 trabalhos realizados em 1964, esta grandeza não nula é assumida como o valor médio de um campo quantizado, sendo este campo um campo escalar para se manter invariância sobre transformações de Lorentz.

Dessa forma, devemos ter

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = c \neq 0, \quad (5.65)$$

enquanto que o valor esperado no vácuo dos campos spinoriais e vetoriais deve ser nulo

$$\langle 0 | \Psi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | V^\mu(x) | 0 \rangle = 0. \quad (5.66)$$

Um exemplo de lagrangiana simples que apresenta a quebra espontânea de simetria foi proposta anteriormente por Goldstone

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi(x)) (\partial_\mu \phi(x)) - \mu^2 |\phi(x)|^2 - \lambda |\phi(x)|^4, \quad (5.67)$$

sendo

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (5.68)$$

um campo escalar complexo e μ^2 e λ constantes reais. Esta lagrangiana é invariante sobre transformações de U(1), $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x)e^{i\alpha}$ e $\phi^*(x) \rightarrow \phi^{*'}(x) = \phi^*(x)e^{-i\alpha}$. Higgs levou este modelo mais adiante para manter a invariância da lagrangiana sobre $SU(2) \times U(1)$, introduzindo no lugar do campo escalar complexo, um dubleto isospinor escalar

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

de forma que sobre o conjunto de transformações $SU(2) \times U(1)$, $\Phi(x)$ se transforma igual a $l^L(x)$. Sobre SU(2)

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{ig\tau_j \omega_j(x)/2} \Phi(x) \quad (5.70)$$

$$\Phi^\dagger(x) \rightarrow \Phi^{\dagger'}(x) = \Phi^\dagger(x) e^{-ig\tau_j \omega_j(x)/2}, \quad (5.71)$$

e sobre U(1)

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{ig'Yf(x)}\Phi(x) \quad (5.72)$$

$$\Phi^\dagger(x) \rightarrow \Phi^{\dagger'}(x) = \Phi^\dagger(x)e^{-ig'Yf(x)}. \quad (5.73)$$

Naturalmente, já que definimos as transformações de $\Phi(x)$ iguais as de $l^L(x)$, para se manter invariante a lagrangiana (5.67) com os dubletos isospinores escalares, reescrevemos ela com as derivadas covariantes

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu\Phi(x))^\dagger (D_\mu\Phi(x)) - \mu^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x) - \lambda\left(\Phi^\dagger(x)\Phi(x)\right)^2 \quad (5.74)$$

Para a energia do sistema descrito por esta lagrangiana ter um mínimo, $\lambda > 0$. O termo cinético desaparece se $\Phi(x)$ for constante

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_a^0 \\ \phi_b^0 \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

e a energia total do sistema corresponde à constante que minimiza o potencial. Se $\mu^2 > 0$, a quebra espontânea de simetria não ocorre, já que o mínimo do potencial nesse caso é $\Phi(x) = 0$. Para $\mu^2 < 0$, o potencial possui um mínimo na circunferência

$$\Phi_0^\dagger\Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}e^{i\theta}. \quad (5.76)$$

Potencial de Higgs

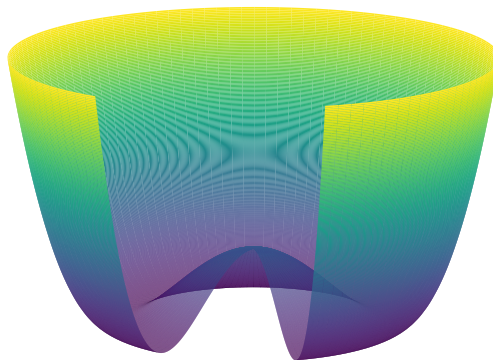


Figura 8 – Potencial de Higgs em termos do valor de $|\Phi(x)|$.

O estado de vácuo nesse caso não é único, a arbitrariedade na direção θ e na combinação de ϕ_a^0 e ϕ_b^0 traz uma degenerescência no estado. A quebra espontânea de simetria ocorre ao escolhermos uma direção θ específica para o estado fundamental. Por simplicidade, escolhemos $\theta = 0$.

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (5.77)$$

Somos levados agora à quebra espontânea de simetria, pois este campo não é invariante por $SU(2) \times U(1)$, apesar de continuar invariante por $U(1)$ apenas. Escolhendo $Y = 1/2$, a componente ϕ_b do campo de Higgs é neutra e garante que a quebra espontânea de simetria conserve a carga elétrica.

Agora podemos escrever o campo de Higgs arbitrário em termos do seu desvio do estado fundamental

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1(x) + i\eta_2(x) \\ v + \sigma(x) + i\eta_3(x) \end{pmatrix}, \quad (5.78)$$

que são também campos escalares. Esta forma nos permite reescrever a lagrangiana de Higgs (5.74) em termos destes campos novos, porém, podemos ver que aumentamos os graus de liberdade totais no campo $\Phi(x)$ ao considerarmos esta nova forma de representá-lo. Não podemos simplesmente criar graus de liberdade, por conta disso, alguns destes campos $\eta_i(x)$ e $\sigma(x)$ são não físicos. Felizmente, podemos eliminar os campos $\eta_i(x)$ com uma transformação de calibre do tipo $U(1)$ (MANDL; SHAW, 2010). Como a lagrangiana já é invariante sobre transformações de $U(1)$, nada ocorre com o campo eletromagnético na teoria, ao implementarmos este mecanismo. O que era de se esperar, uma vez que o fóton de fato é não-massivo, não esperamos que a quebra espontânea de simetria o afete.

Para entendermos como a massa aparece espontaneamente deste mecanismo, vamos acoplar à lagrangiana (5.74) um campo vetorial não massivo $E^\mu(x)$ adicionando o termo $-(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ em (5.74) e representando sua derivada covariante como $D_\mu\Phi(x) = (\partial_\mu + iqE_\mu(x))\Phi(x)$. Reescrevendo a lagrangiana (5.74) em termos apenas do campo $\sigma(x)$ que não é eliminado pela transformação de calibre, conhecida como calibre unitário, e com o campo vetorial não massivo incluso, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2}(D^\mu\sigma(x))(D_\mu\sigma(x)) - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv^2)E_\mu(x)E^\mu(x) - \\ & - \lambda v\sigma^3(x) - \frac{1}{4}\lambda\sigma^4(x) + \frac{1}{2}q^2E_\mu(x)E^\mu(x)(2v\sigma(x) + \sigma^2(x)). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Os últimos termos a partir de $-\lambda v \sigma^3(x)$ podem ser considerados termos de interação, uma vez que apenas termos quadráticos aparecem em lagrangianas livres. O campo $\sigma(x)$, ao ser quantizado, dá origem a um bóson escalar neutro massivo de massa $\sqrt{2\lambda v^2}$, o bóson de Higgs. Enquanto que o campo vetorial agora apresenta uma massa de $|qv|$. Este resultado é incrível, iniciando com um campo escalar complexo e um campo vetorial não massivo, terminamos com um campo escalar real e um campo vetorial massivo.

Nos resta ainda a massa dos léptons. Para isso, iremos adicionar um termo extra na lagrangiana correspondendo às interações entre os léptons e o bóson escalar, as chamadas interações de Yukawa (MANDL; SHAW, 2010).

$$\mathcal{L}_{LH} = -g_l \left(\bar{l}^L(x) \Psi_l^R(x) \Phi(x) + \Phi^\dagger(x) \bar{\Psi}_l^R(x) l^L(x) \right) - g_{v_l} \left(\bar{l}^L(x) \Psi_{v_l}^R(x) \tilde{\Psi}(x) + \tilde{\Psi}^\dagger(x) \bar{\Psi}_{v_l}^R(x) l^L(x) \right), \quad (5.80)$$

g_l e g_{v_l} são constantes adimensionais, $\tilde{\Psi}(x) = -i(\Psi^\dagger(x) \tau_2)^T$ e T significa transposto.

É neste momento que paramos um pouco para revisar este mecanismo conhecido como mecanismo de Higgs. Primeiro, vimos que a ausência de um valor de campo médio no vácuo levava a uma quebra na lei de transformação da simetria SU(2) enquanto que a simetria U(1) permanecia invariante. Logo em seguida, vimos que este campo escalar complexo presente no vácuo pode ser expresso por um campo complexo escalar apenas ao fazer uma mudança de calibre. Por fim, vimos que este campo escalar, ao interagir com um campo vetorial não massivo gera um termo massivo na lagrangiana.

Este mecanismo tem um profundo significado físico. Ele nos diz que há um campo específico que permeia até mesmo o vácuo, um campo cujo valor de energia mais baixa no vácuo não é zero (isso é a quebra espontânea de simetria), além disso, este campo interage com outros e, esta interação é responsável por criar massa para os demais campos com quem interage. Este resultado nos diz que os bósons mais massivos são aqueles que mais interagem com o campo de Higgs, enquanto que aqueles menos massivos são os que menos interagem.

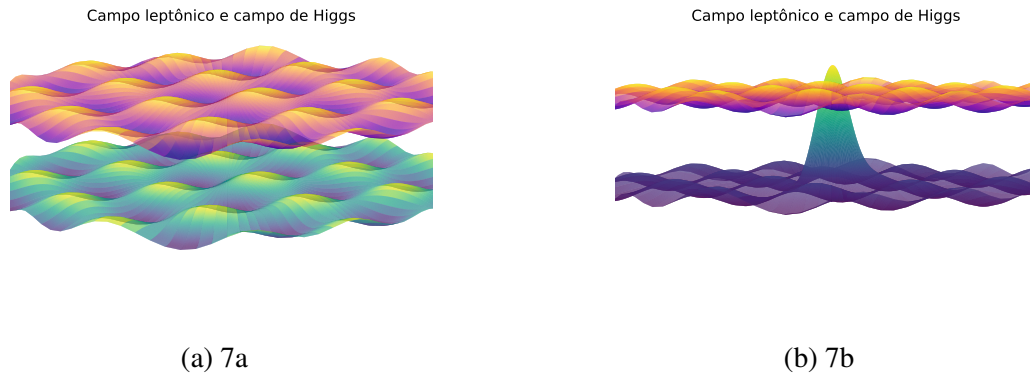


Figura 9 – Representação dos campos leptônicos e sua interação com o campo de Higgs. A esquerda (9a) representamos um campo leptônico e o campo de Higgs no estado de vácuo, o campo de Higgs possui valor médio $\langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle \neq 0$, portanto, escolhemos representa-lo em cima (podemos pensar no eixo vertical como sendo o valor médio do campo) e o campo leptônico embaixo, em seu estado fundamental de $\langle 0 | \Psi(x) | 0 \rangle = 0$. Na direita (9b), representamos agora a criação de um lépton, sendo ilustrado por um pacote de onda centrado na posição da criação do mesmo. A partícula é "arrastada" no campo de Higgs, adquirindo sua massa ao interagir com este campo.

Entretanto, note que na interação dos léptons com o Higgs, tanto os campos destros como os canhotos entram na lagrangiana, isso significa que uma partícula precisa ter ambas as quiralidades para ter massa pelo mecanismo de Higgs. Como já foi dito antes, não temos nenhuma prova experimental da existência de neutrinos destros, portanto, o modelo padrão não considera a existência de Ψ_{ν_r} . Isso significa que no modelo padrão os neutrinos não possuem massa! E como veremos adiante, o fenômeno de oscilação de neutrinos nos mostra que eles possuem de fato massa. (Mas mesmo assim parece que todos ignoram esse problema no modelo padrão)

No ano de 2012, a colaboração CMS no CERN anunciou a descoberta do bóson de Higgs no processo de decaimento difóton (Figura 10), comprovando assim a existência do campo de Higgs e validando, experimentalmente, o mecanismo de Higgs (KHACHATRYAN et al., 2014).

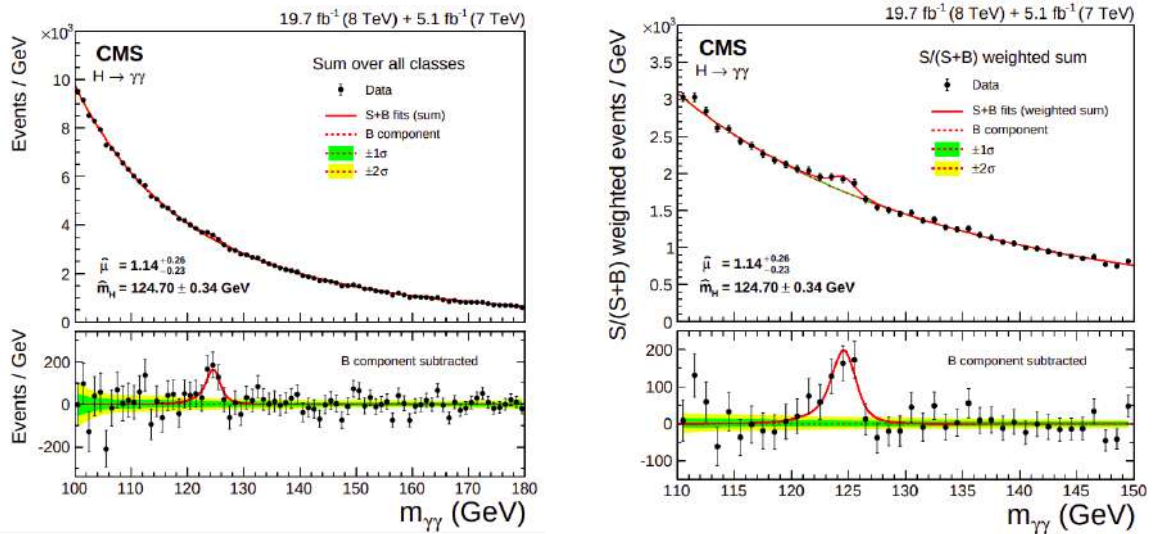


Figura 10 – Observação da produção do bóson de Higgs no decaimento difóton. À esquerda a soma de 25 sinais diferentes nos eventos realizados a 7 e 8 TeV. As margens de 1 e 2 σ representam a margem de erro do *background*. A pequena saliência similar a um morro na contagem de eventos representa o pico de ressonância do bóson de Higgs, perto do valor da massa deste bóson. O gráfico inferior representa o resíduo das medidas após a remoção do *background*. Na direita, está ilustrado o espectro de massa do evento, com um pico em 124.70 ± 0.34 GeV, permitindo a identificação da massa do bóson de Higgs. Imagem retirada de (KHACHATRYAN et al., 2014).

5.3 A Lagrangiana Eletrofraca Padrão

Afim de finalizar o estudo a respeito da interação eletrofraca, estudamos cuidadosamente o significado físico da lagrangiana completa e alguns processos importantes. Colocamos a lagrangiana no calibre unitário e reescrevemos ela em termos dos campos físicos W^μ , A^μ , Z^μ e σ .

No calibre unitário, o campo de Higgs é expresso por

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}, \quad (5.81)$$

ao sofrer uma transformação de SU(2) que leva um spinor a um spinor baixo, isto é, um spinor com apenas componente não nula embaixo. Em seguida a transformação U(1) elimina os campos complexos, tornando o spinor baixo em uma grandeza real (MANDL; SHAW, 2010). Para o restante da lagrangiana, utilizamos as equações (5.53), (5.55) e (5.56) para reescrever $W_i(x)$ e $B_\mu(x)$ em termos de W_μ , W_μ^\dagger , Z_μ e A_μ . Para os termos $\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_H$ temos

$$\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_H = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} + (D^\mu\Phi(x))^\dagger (\mu\Phi(x)) - \mu^2\Phi^\dagger(x)\Phi(x) - \lambda\left(\Phi^\dagger(x)\Phi(x)\right)^2 \quad (5.82)$$

que fica reescrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_H = & -\frac{1}{4}\left[(-\partial_\mu\sin(\theta_W)Z_\nu + \partial_\mu\cos(\theta_W)A_\nu + \partial_\nu\sin(\theta_W)Z_\mu - \partial_\nu\cos(\theta_W)A_\mu) \times \right. \\ & \times (-\partial^\mu\sin(\theta_W)Z^\nu + \partial^\mu\cos(\theta_W)A^\nu + \partial^\nu\sin(\theta_W)Z^\mu - \partial^\nu\cos(\theta_W)A^\mu)] - \\ & -\frac{1}{4}\left[\left(\partial_\mu\left(\frac{W_\nu + W_\nu^\dagger}{2}\right) - \partial_\nu\left(\frac{W_\mu + W_\mu^\dagger}{2}\right)\right)\left(\partial^\mu\left(\frac{W^\nu + W^{\nu\dagger}}{2}\right) - \partial^\nu\left(\frac{W^\mu + W^{\mu\dagger}}{2}\right)\right) + \right. \\ & + \left.\left(\partial_\mu\left(\frac{-(W_\nu - W_\nu^\dagger)}{2}\right) - \partial_\nu\left(\frac{i(W_\mu - W_\mu^\dagger)}{2}\right)\right)\left(\partial^\mu\left(\frac{i(W^\nu - W^{\nu\dagger})}{2}\right) - \partial^\nu\left(\frac{i(W^\mu - W^{\mu\dagger})}{2}\right)\right)\right] + \\ & + (\partial_\mu\cos(\theta_W)Z_\nu + \partial_\mu\sin(\theta_W)A_\nu - \partial_\nu\cos(\theta_W)Z_\mu - \partial_\nu\sin(\theta_W)A_\mu) \times \\ & \times (\partial^\mu\cos(\theta_W)Z^\nu + \partial^\mu\sin(\theta_W)A^\nu - \partial^\nu\cos(\theta_W)Z^\mu - \partial^\nu\sin(\theta_W)A^\mu) + D^\mu\sigma D_\mu\sigma - \\ & - \mu^2(v^2 + 2\nu\sigma + \sigma^2) - \lambda(v^2 + 2\nu\sigma + \sigma^2)^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu - \\ & - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma)(\partial_\mu\sigma) - \frac{1}{2}m_H^2\sigma^2 + \mathcal{L}_I^{BB} + \mathcal{L}_I^{HH} + \mathcal{L}_I^{HB}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{BB} = & ig\cos(\theta_W)\left[\left(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha\right)\partial^\alpha Z^\beta + \left(\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha\right)W^{\beta\dagger}Z^\alpha - \left(\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger\right)W^\beta Z^\alpha\right] \\ & + ie\left[\left(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha\right)\partial^\alpha A^\beta + \left(\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha\right)W^{\beta\dagger}A^\alpha - \left(\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger\right)W^\beta A^\alpha\right] + \\ & + g^2\cos^2(\theta_W)\left(W_\alpha W_\beta^\dagger Z^\alpha Z^\beta - W_\beta W^{\beta\dagger}Z_\alpha Z^\alpha\right) + e^2\left(W_\alpha W_\beta^\dagger A^\alpha A^\beta - W_\beta W^{\beta\dagger}A_\alpha A^\alpha\right) + \quad (5.83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + eg\cos(\theta_W)\left[W_\alpha W_\beta^\dagger\left(Z^\alpha A^\beta + A^\alpha Z^\beta\right) - 2W_\beta W^{\beta\dagger}A_\alpha Z^\alpha\right] + \frac{1}{2}g^2W_\alpha^\dagger W_\beta\left(W^{\alpha\dagger}W^\beta - W^\alpha W^{\beta\dagger}\right) \\ \mathcal{L}_I^{HH} = & \frac{1}{4}\lambda^4 - \lambda\nu\sigma^3 \quad (5.84) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_I^{HB} = \frac{1}{2}\nu g^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha \sigma + \frac{1}{4}g^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha \sigma^2 + \frac{\nu g^2}{4\cos^2(\theta_W)}Z_\alpha Z^\alpha \sigma + \frac{g^2}{8\cos^2(\theta_W)}Z_\alpha Z^\alpha \sigma^2. \quad (5.85)$$

Além disso, definimos também

$$m_W = \frac{\nu g}{2} \quad (5.86)$$

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos(\theta_W)} \quad (5.87)$$

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2}, \quad (5.88)$$

e utilizamos as relações (5.77) e (5.58). Para os outros termos $\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_{LH}$, também utilizamos $\Psi^L(x) = (1/2)(1 - \gamma^5)\Psi(x)$ e $\Psi^R(x) = (1/2)(1 + \gamma^5)\Psi(x)$ para reescrever os campos destros e canhotos em termos dos campos totais $\Psi(x)$

$$\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_{LH} = \overline{\Psi}_l (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_l) \Psi_l + \overline{\Psi}_{\nu_l} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{\nu_l}) \Psi_{\nu_l} + \mathcal{L}_I^{LB} + \mathcal{L}_I^{HL}, \quad (5.89)$$

sendo que os termos de interação são

$$\mathcal{L}_I^{LB} = e \overline{\Psi}_l \Psi_l A^\alpha - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\overline{\Psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \Psi_l W_\alpha + \overline{\Psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_l} W_\alpha^\dagger \right] - \quad (5.90)$$

$$- \frac{g}{4 \cos(\theta_W)} \overline{\Psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_l} Z_\alpha + \frac{g}{4 \cos(\theta_W)} \overline{\Psi}_l \gamma^\alpha (1 - 4 \sin^2(\theta_W) - \gamma^5) \Psi_l Z_\alpha$$

$$\mathcal{L}_I^{HL} = -\frac{1}{v} m_l \overline{\Psi}_l \Psi_l \sigma - \frac{1}{v} m_{\nu_l} \overline{\Psi}_{\nu_l} \Psi_{\nu_l} \sigma, \quad (5.91)$$

e as massas m_l e m_{ν_l} dadas por

$$m_l = \frac{vg_l}{\sqrt{2}} \quad (5.92)$$

$$m_{\nu_l} = \frac{vg_{\nu_l}}{2}. \quad (5.93)$$

Neste ponto, vale lembrar novamente que, como no modelo padrão não existe a componente $\Psi_{\nu_l}^R$, o termo de massa do neutrino em (??) é nulo e por consequência $m_{\nu_l} = 0$. É interessante notar que as massas (5.86) - (5.88) e (5.92) são todas determinadas a partir das constantes de acoplamento na teoria com o campo de Higgs! Ressaltando o que já foi dito antes de que as partículas mais massivas são aquelas que mais interagem com o campo de Higgs, isto é, as com a maior constante de acoplamento. As relações entre as constantes mensuráveis nos permite reescrever a massa prevista teórica dos bósons W^\pm e Z^0 como

$$m_W = \sqrt{\frac{\alpha\pi}{G_F \sqrt{2} \sin(\theta_W)}} \frac{1}{\sin(\theta_W)} = 77.5 \text{ GeV} \quad (5.94)$$

$$m_Z = \sqrt{\frac{\alpha\pi}{G_F \sqrt{2} \sin(2\theta_W)}} \frac{2}{\sin(2\theta_W)} = 88.4 \text{ GeV}, \quad (5.95)$$

um valor um pouco abaixo do experimental. O motivo para esta discrepância está no fato de não termos considerado a relação entre as massas e as constantes em seu valor normalizado pois um tratamento envolvendo normalização foge o escopo deste texto, mas pode ser encontrado em (SCHWARTZ, 2014), (PESKIN, 2018) e (SREDNICKI, 2007).

Enfim, escrevemos a lagrangiana eletrofraca padrão completa em termos dos campos físicos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eletrofraca} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma)(\partial_\mu\sigma) - \\
& - \overline{\Psi}_l(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_l)\Psi_l + \overline{\Psi}_{\nu_l}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{\nu_l})\Psi_{\nu_l} - \frac{1}{2}m_H^2\sigma^2 + \\
& + ig\cos(\theta_W)\left[(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha)\partial^\alpha Z^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha)W^{\beta\dagger}Z^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger)W^{\beta}Z^\alpha\right] + \\
& + ie\left[(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha)\partial^\alpha A^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha)W^{\beta\dagger}A^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger)W^{\beta}A^\alpha\right] + \\
& + g^2\cos^2(\theta_W)\left(W_\alpha W_\beta^\dagger Z^\alpha Z^\beta - W_\beta W^{\beta\dagger}Z_\alpha Z^\alpha\right) + e^2\left(W_\alpha W_\beta^\dagger A^\alpha A^\beta - W_\beta W^{\beta\dagger}A_\alpha A^\alpha\right) + \\
& + eg\cos(\theta_W)\left[W_\alpha W_\beta^\dagger\left(Z^\alpha A^\beta + A^\alpha Z^\beta\right) - 2W_\beta W^{\beta\dagger}A_\alpha Z^\alpha\right] + \frac{1}{2}g^2 W_\alpha^\dagger W_\beta\left(W^{\alpha\dagger}W^\beta - W^\alpha W^{\beta\dagger}\right) - \\
& - \frac{g}{2\sqrt{2}}\left[\overline{\Psi}_{\nu_l}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\Psi_l W_\alpha + \overline{\Psi}_l\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\Psi_{\nu_l}W_\alpha^\dagger\right] - \frac{g}{4\cos(\theta_W)}\overline{\Psi}_{\nu_l}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\Psi_{\nu_l}Z_\alpha + \\
& + \frac{g}{4\cos(\theta_W)}\overline{\Psi}_l\gamma^\alpha(1-4\sin^2(\theta_W)-\gamma^5)\Psi_l Z_\alpha + e\overline{\Psi}_l\Psi_l A^\alpha + \\
& + \frac{1}{4}\lambda\sigma^4 - \lambda\nu\sigma^3 + \frac{1}{2}\nu g^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha\sigma + \frac{1}{4}g^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha\sigma^2 + \frac{\nu g^2}{4\cos^2(\theta_W)}Z_\alpha Z^\alpha\sigma + \frac{g^2}{8\cos^2(\theta_W)}Z_\alpha Z^\alpha\sigma^2 - \\
& - \frac{1}{v}m_l\overline{\Psi}_l\Psi_l\sigma - \frac{1}{v}m_{\nu_l}\overline{\Psi}_{\nu_l}\Psi_{\nu_l}\sigma.
\end{aligned}$$

Nela, a primeira e segunda linha representam a propagação livre dos bósons W^\pm , Z^0 , os léptons e o bóson de Higgs σ . Da terceira à sexta linha, temos as interações entre os próprios bósons vetoriais. A sétima e oitava linha contém as interações entre os léptons e os bósons via corrente neutra (pelo intermédio de um fóton ou um bóson Z^0) e via corrente carregada (pela troca de bósons W^\pm). Na nona linha, aparecem os termos de interação entre os bósons vetoriais com o bóson de Higgs e a interação do próprio bóson de Higgs com ele mesmo. Na décima e última linha, temos a interação dos léptons com o bóson de Higgs.

Com isso, encerramos a construção da teoria eletrofraca. Ela será aplicada mais para frente para explicar o processo de geração de neutrinos na supernova. Seguimos no próximo capítulo para a descrição das principais interações envolvendo neutrinos.

6 Interações de Neutrinos

Neste capítulo, exploramos em detalhes as interações mais comuns envolvendo neutrinos, buscando encontrar grandezas mensuráveis e comparar algumas delas com dados experimentais coletados em diversos experimentos ao redor do mundo.

6.1 Espalhamento neutrino elétron

Começamos pela interação mais simples e relevante para nossos estudos, uma vez que esta interação constitui uma das formas de detecção utilizadas pelo DUNE e outros detectores como o Super-Kamiokande ([SUPER-KAMIOKANDE](#),). Em ordem mais baixa da teoria de perturbação desenvolvida no capítulo 4, os neutrinos só interagem com léptons livres ([GIUNTI; KIM, 2007](#)). Apesar de os elétrons nos detectores não estarem livres, esta aproximação é bem válida para os elétrons de camadas mais externas fracamente ligados ao núcleo atômico ([GIUNTI; KIM, 2007](#)). Um neutrino de qualquer sabor pode interagir com um lépton de maneira a criar um espalhamento elástico entre os dois no processo

$$\nu_\chi + e^- \rightarrow \nu_\chi + e^-. \quad \chi = e, \mu, \tau \quad (6.1)$$

Para um processo de corrente neutra descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(NC)} = -\frac{g}{4\cos(\theta_W)} \left[\bar{\Psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_l} Z_\alpha + \bar{\Psi}_l \gamma^\alpha (1 - 4\sin^2(\theta_W) - \gamma^5) \Psi_l Z_\alpha \right], \quad (6.2)$$

representada no último termo da sétima linha da lagrangiana eletrofraca total descrita no capítulo anterior e no primeiro termo da oitava linha. Este tipo de interação, seguindo as regras de Feynman da interação eletrofraca (Apêndice C) resulta no diagrama de interação mostrado na figura 11.



Figura 11 – Espalhamento elástico de um neutrino com um elétron via corrente neutra.

O processo também pode ocorrer por uma interação de corrente carregada, descrita no primeiro termo da sétima linha na lagrangiana eletrofraca

$$\mathcal{L}^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{\Psi}_{\nu_l} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \Psi_l W_\alpha + \bar{\Psi}_l \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \Psi_{\nu_l} W_\alpha^\dagger \right], \quad (6.3)$$

esta interação nos fornece o diagrama descrito pela figura 12.



Figura 12 – Espalhamento elástico de um neutrino com um elétron via corrente carregada.

A interação total desse espalhamento é descrita pela soma dos canais de interação, como mencionado no capítulo 4. Vamos estudar o processo total descrito por (6.1), em qualquer referencial, a seção de choque é proporcional a $G_F^2 s$, sendo $s = (E_{\nu_i} + E_{e_i})^2$ é a energia total ao quadrado (GIUNTI; KIM, 2007). Vale ressaltar que s é um invariante relativístico, tornando ele uma boa escolha de grandeza base para a descrição do fenômeno. No referencial do laboratório, o elétron se encontra em repouso e o neutrino incide com energia $E_\nu = E_{\nu_i}$. Neste caso $s = 2m_e E_\nu$ desprezando a massa do neutrino, uma vez que está tem um limite superior de massa $m_\nu < 2 \text{ eV}$ (OLIVE, 2014), pelo menos cerca de 250000 mais leve que o elétron. A seção de choque diferencial para um espalhamento de duas partículas em termos da quadri transferência de momento $Q^2 = -(p_{e_f} - p_{e_i})^2 = -(p_{\nu_i} - p_{\nu_f})^2 = -q^2$ é dada por, no caso do neutrino com o elétron, (BERESTETSKII; LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1971) e (GIUNTI; KIM, 2007)

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \frac{G_F^2}{\pi} \left[g_1^2 + g_2^2 \left(1 - \frac{Q^2}{2p_{\nu_i} p_{e_i}} \right) - g_1 g_2 m_e^2 \frac{Q^2}{2(p_{\nu_i} p_{e_i})^2} \right] \quad (6.4)$$

onde g_1 e g_2 dependem do sabor do neutrino, seus valores podem ser encontrados na tabela 2.

sabor	g_1	g_2
ν_e	$\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_W)$	$\sin^2(\theta_W)$
$\bar{\nu}_e$	$\sin^2(\theta_W)$	$\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_W)$
$\nu_{\mu,\tau}$	$-\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_W)$	$\sin^2(\theta_W)$
$\bar{\nu}_{\mu,\tau}$	$\sin^2(\theta_W)$	$-\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_W)$

Tabela 2 – Valores de g_1 e g_2 para os diferentes sabores de neutrinos

No referencial do laboratório, $\vec{p}_{ei} = 0$, logo $Q^2 = 2m_e T_e = 2m_e T_{ef}$. Sendo T_{ef} a energia cinética máxima que o elétron ganha do neutrino. A seção de choque diferencial em termos de T_e , no referencial do laboratório fica então (GIUNTI; KIM, 2007)

$$\frac{d\sigma}{dT_e} = \frac{\sigma_0}{m_e} \left[g_1^2 + g_2^2 \left(1 - \frac{T_e}{E_\nu} \right)^2 - g_1 g_2 \frac{m_e T_e}{E_\nu^2} \right], \quad (6.5)$$

sendo

$$\sigma_0 = \frac{2G_F^2 m_e^2}{\pi} = 88.06 \cdot 10^{-46} \text{ cm}^2. \quad (6.6)$$

Pela conservação da energia no sistema, considerando que o elétron é espalhado com um ângulo θ em relação à direção de incidência do neutrino, temos

$$T_e = \frac{2m_e E_\nu^2 \cos^2(\theta)}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2(\theta)}, \quad (6.7)$$

com isso, calculamos dT_e

$$dT_e = \frac{4m_e E_\nu^2 (m_e + E_\nu)^2}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2(\theta)} \cos(\theta) d\cos(\theta). \quad (6.8)$$

Podemos agora reescrever a seção de choque em função do ângulo de espalhamento do elétron

$$\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \sigma_0 \frac{4m_e E_\nu^2 (m_e + E_\nu)^2 \cos(\theta)}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2(\theta)} \left[g_1^2 + g_2^2 \left(1 - \frac{2m_e E_\nu \cos^2(\theta)}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2(\theta)} \right)^2 - g_1 g_2 \frac{2m_e^2 \cos^2(\theta)}{(m_e + E_\nu)^2 - E_\nu^2 \cos^2(\theta)} \right]. \quad (6.9)$$

Este resultado já é interessante de um ponto de vista experimental, o gráfico mostrado na figura 13 indica como a equação (6.9) varia com o $\cos(\theta)$ e $\sigma(\cos(\theta))$ integrado numericamente tendo $\cos(\theta)$ como variável. Neste gráfico vemos que a seção de choque aumenta consideravelmente conforme $\cos(\theta)$ se aproxima de 1, isto é, conforme a direção de ejeção do elétron conserva a direção de incidência do neutrino. Este resultado nos mostra que, experimentalmente, analisando a trajetória do elétron dentro do detector (através da radiação Cherenkov no caso do Super-Kamiokande), podemos saber com uma boa precisão a direção de incidência

do neutrino. Utilizando este fato, o detector Super-Kamiokande foi capaz de comprovar que os neutrinos detectados vinham do sol.

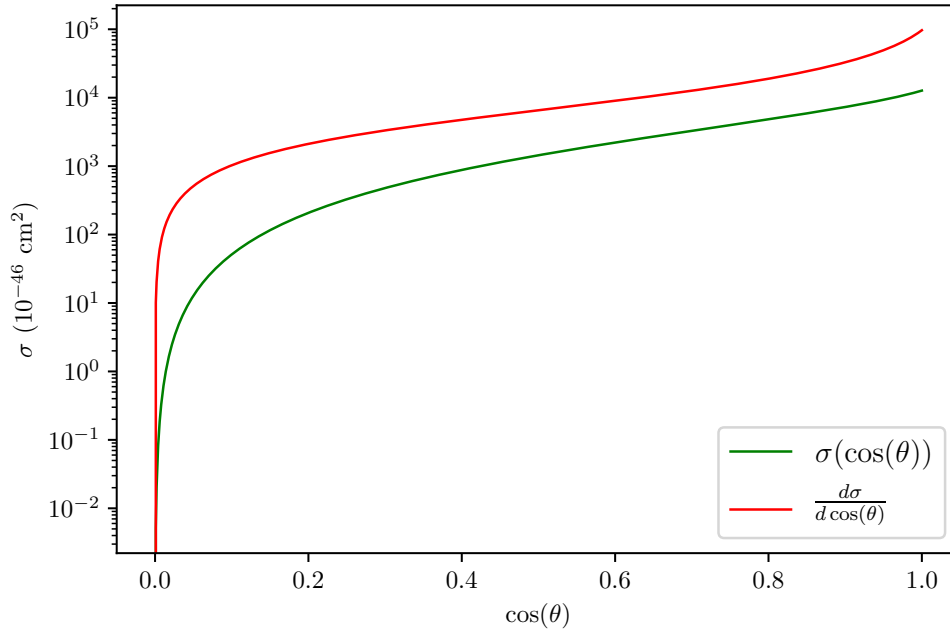


Figura 13 – Seção de choque do espalhamento elástico neutrino-elétron em função de $\cos(\theta)$.

Podemos deduzir agora, já que $\cos(\theta) \leq 1$ que o máximo de energia cinética ganha pelo elétron é

$$T_e^{\max}(E_\nu) = \frac{2E_\nu^2}{m_e + 2E_\nu}, \quad (6.10)$$

e também podemos ver que existe um mínimo de energia do neutrino para produzir um ganho de energia cinética no elétron

$$E_\nu^{\min}(T_e) = \frac{T_e}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2m_e}{T_e}} \right). \quad (6.11)$$

Em um experimento, T_e possui um valor mínimo para ser detectável acima do ruído eletrônico do detector, por exemplo, no detector Super-Kamiokande, este mínimo é de 4.5 MeV (FUKUDA et al., 2003). A seção de choque total é uma função da energia do neutrino e de T_e mínimo para detecção!

$$\sigma(E, T_e^{\min}) = \frac{\sigma_0}{m_e} \left[(g_1^2 + g_2^2)(T_e^{\max} - T_e^{\min}) - \left(g_2^2 + g_1 g_2 \frac{m_e}{2E_\nu} \right) \left(\frac{T_e^{\max 2} - T_e^{\min 2}}{E_\nu} \right) + \frac{1}{3} g_2^2 \left(\frac{T_e^{\max 3} - T_e^{\min 3}}{E_\nu^2} \right) \right], \quad (6.12)$$

onde T_e^{\max} é dado por (6.10). Assumindo o caso $T_e^{\min} = 0$, temos a seção de choque do processo na natureza, e se fizermos $T_e^{\min} > 0$, obtemos a seção de choque do processo em um detector. A figura 14 nos mostra como a seção de choque para este processo varia conforme E_ν cresce.

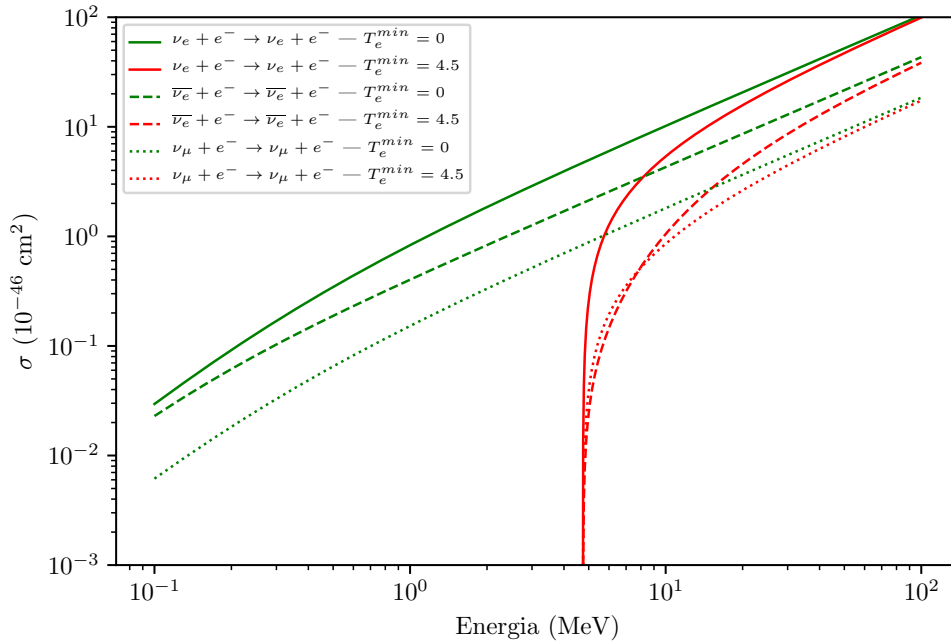


Figura 14 – Seção de choque do espalhamento elástico neutrino-elétron em função da energia E_ν . Em vermelho, as curvas indicam a seção de choque de detecção do Super-Kamiokande, em verde as curvas indicam a seção de choque do processo na natureza.

6.2 Decaimento beta

Passamos agora para o estudo que deu origem à hipótese da existência dos neutrinos, como mencionado na introdução, o decaimento beta. O decaimento beta envolve um nêutron, um próton, um elétron e um anti-neutrino elétron. A priori, consideraremos o nêutron e o próton como férmions fundamentais de Dirac, isto é, sem estrutura interna. O diagrama de Feynman de ordem mais baixa para este fenômeno é representado pela figura 15.

Utilizando o apêndice C podemos ver que o elemento de matriz que representa a amplitude de espalhamento \mathcal{M} deste processo é dado por

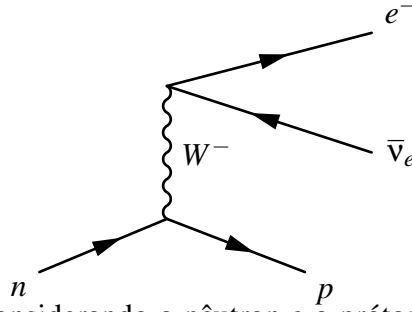


Figura 15 – Decaimento beta considerando o nêutron e o próton como férmions de Dirac fundamentais.

$$\mathcal{M} = \frac{g_W^2}{8m_W^2} \left(\bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_1) \right) \left(\bar{u}(p_4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(p_2) \right) \quad (6.13)$$

sendo p_1 o momento do nêutron, p_2 o momento do anti-neutrino, p_3 o momento do próton e p_4 o momento do elétron. Porém, não sabemos o estado de spin (ou equivalentemente, helicidade) destas, portanto devemos somar esta amplitude sobre todos os possíveis estados de spin iniciais e finais e tomar uma média sobre os possíveis estados de spin iniciais das partículas incidentes (neste caso, o nêutron). Além disso, elevamos a amplitude de espalhamento ao quadrado afim de se obter a probabilidade de ocorrência do fenômeno. Assim, fazendo uso do truque de Casimir (GRIFFITHS, 2008)

$$\begin{aligned} \sum_s |\mathcal{M}|^2 &= \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \left(\frac{g_W}{8m_W^2} \right)^2 \text{Tr} \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma^\alpha p_{1\alpha} + m_n) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\gamma^\alpha p_{3\alpha} + m_p) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \right. \\ &\times \left. \gamma^\alpha p_{2\alpha} \gamma_\nu (1 - \gamma^5) (\gamma^\alpha p_{4\alpha} + m_e) \right] = \left(\frac{g_W}{8m_W^2} \right)^2 64 \left[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) - i \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma} \right] \times \\ &\times \left[p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_2 \cdot p_4) - i \varepsilon_{\mu\nu\kappa\tau} p_2^\kappa p_4^\tau \right] = 2 \left(\frac{g_W}{8m_W^2} \right)^2 (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4), \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde aqui, consideramos a massa do neutrino como desprezível novamente. No referencial de repouso do nêutron, reescrevemos

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = m_n \left(\frac{g_W}{8m_W^2} \right)^2 |\vec{p}_2| (m_n^2 - m_p^2 - m_e^2 - 2m_n |\vec{p}_2|) \quad (6.15)$$

Com isso, podemos calcular grandezas importantes relacionadas ao decaimento beta como a taxa de decaimento $d\Gamma$ dada por

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{2m_n} \left(\frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2 |\vec{p}_2|} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_p^2}} \right) \left(\frac{d^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2}} \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4). \quad (6.16)$$

A taxa de decaimento é a probabilidade de decaimento integrada sobre todos os momentos das partículas envolvidas, o fator δ^4 é inserido de forma a garantir a conservação do momento no processo. Iniciamos a integração por \vec{p}_3 já que $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ não possui dependência com esta variável. O momento p_3 do próton vai de 0 até um valor máximo de $u = \sqrt{(\vec{p}_2 + \vec{p}_4)^2 + m_p^2}$ obtemos com isso

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{16(2\pi)^5 m_n} \frac{d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_4}{|\vec{p}_2| \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2}} \delta \left(m_n - |\vec{p}_2| - u - \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} \right). \quad (6.17)$$

Agora $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ depende de \vec{p}_2 , para fazer esta integral, escrevemos

$$d^3 \vec{p}_2 = |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \sin \theta d\theta d\phi, \quad (6.18)$$

de forma que o eixo z desse sistema de coordenadas esteja alinhado com \vec{p}_4 . Assim $u^2 = |\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_4|^2 + 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4| \cos \theta + m_p^2$ e $u du = -|\vec{p}_2||\vec{p}_4| \sin \theta d\theta$. As integrais em θ e ϕ nos deixam apenas com

$$d\Gamma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{(4\pi)^4 m_n} \frac{d^3 \vec{p}_4}{|\vec{p}_4| \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2}} d\vec{p}_2 I, \quad (6.19)$$

sendo

$$I = \int_{u_-}^{u_+} \delta \left(m_n - |\vec{p}_2| - \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} - u \right) du = \begin{cases} 1, & \text{se } u_- < \left(m_n - |\vec{p}_2| - \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} \right) < u_+ \\ 0 & \end{cases} \quad (6.20)$$

e $u_{\pm} = \sqrt{(|\vec{p}_2| \pm |\vec{p}_4|)^2 + m_p^2}$. Esta equação nos diz os limites de \vec{p}_2 . Para o limite inferior, temos

$$\begin{aligned} u_-^2 &= |\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_4|^2 - 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4| + m_p^2 < \left(m_n - |\vec{p}_2| - \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} \right)^2 = \\ &= m_n^2 + |\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_4|^2 + m_e^2 - 2m_n |\vec{p}_2| - 2m_n \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} + 2|\vec{p}_2| \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2|\vec{p}_2| \left(m_n - |\vec{p}_4| - \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} \right) < m_n^2 - m_p^2 + m_e^2 - 2m_n \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\vec{p}_2| < \frac{1}{2} \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2 - 2m_n \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2}}{m_n - |\vec{p}_4| - \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_e^2}} = p_-. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Agora para o limite superior, temos

$$\begin{aligned}
u_+^2 &= |\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_4|^2 + 2|\vec{p}_2||\vec{p}_4| + m_p^2 < \left(m_n - |\vec{p}_2| - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2}\right)^2 = \\
&= m_n^2 + |\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_4|^2 + m_e^2 - 2m_n|\vec{p}_2| - 2m_n\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2} + 2|\vec{p}_2|\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2|\vec{p}_2| \left(m_n + |\vec{p}_4| - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2}\right) > m_n^2 - m_p^2 + m_e^2 - 2m_n\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow |\vec{p}_2| > \frac{1}{2} \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2 - 2m_n\sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2}}{m_n + |\vec{p}_4| - \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2}} = p_+.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Usando agora (6.15), temos

$$\int_{p_-}^{p_+} |\vec{p}_2| (m_n^2 - m_p^2 - m_e^2 - 2m_n|\vec{p}_2|) d|\vec{p}_2| = J. \tag{6.23}$$

Com isso, temos que todos os termos com dependência em p_4 estão fora desta integral, e podemos integrar em \vec{p}_4 separadamente. Fazendo $d^3\vec{p}_4 = 4\pi|\vec{p}_4|^2 d|\vec{p}_4|$, obtemos

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{g_W}{8m_W^2}\right)^4 J(E), \tag{6.24}$$

sendo $E = \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_e^2}$ a energia do elétron liberado no decaimento. $J(E)$ pode ser expresso como

$$J(E) = \frac{1}{2}(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2)(p_+^2 - p_-^2) - \frac{2m_n}{3}(p_+^3 - p_-^3), \tag{6.25}$$

olhando bem para a forma de p_{\pm} , podemos aproxima-lo. Para isso, introduzimos as constantes $\varepsilon = (m_n - m_p)/m_n$, $\delta = m_e/m_n$, $\eta = E/m_n$ e $\phi = |\vec{p}_4|/m_n$.

$$\begin{aligned}
p_{\pm} &= \frac{1}{2} \frac{m_n^2 - (1 - \varepsilon)^2 m_n^2 + \delta^2 m_n^2 - 2m_n\sqrt{\phi^2 m_n^2 + \delta^2 m_n^2}}{m_n - \sqrt{\phi^2 m_n^2 + \delta^2 m_n^2} \mp \phi m_n} = \\
&= m_n \left(\frac{1}{2} \frac{1 - 1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \delta^2 - 2\sqrt{\phi^2 + \delta^2}}{1 - \sqrt{\phi^2 + \delta^2} \mp \phi} \right) = \\
&= m_n \left(\frac{\varepsilon - \eta + (\delta^2 - \varepsilon^2)/2}{1 - \eta \mp \phi} \right) \approx m_n(\varepsilon - \eta) \left[1 + \frac{(\delta^2 - \varepsilon^2)}{2(\varepsilon - \eta)} \right] (1 + \eta \pm \phi) \\
&\approx m_n(\varepsilon - \eta) \left[1 + \eta \mp \phi + \frac{(\delta^2 - \varepsilon^2)}{2(\varepsilon - \eta)} \right].
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Agora expandimos os termos de potências

$$\begin{aligned}
 p_+ - p_- &= -2m_n(\varepsilon - \eta)\phi \\
 p_+ + p_- &= 2m_n(\varepsilon - \eta) \\
 p_+^2 - p_-^2 &= (p_+ - p_-)(p_+ + p_-) = -4m_n^2(\varepsilon - \eta)^2\phi \\
 p_+^2 + p_+p_- + p_-^2 &= 3m_n^2(\varepsilon - \eta)^2 \\
 p_+^3 - p_-^3 &= (p_+ - p_-)(p_+^2 + p_+p_- + p_-^2) = -6m_n^3(\varepsilon - \eta)^3\phi,
 \end{aligned}$$

com isso obtemos finalmente

$$J(E) = -4m_n^4(\varepsilon - \eta)^2\phi\eta = 4E\sqrt{E^2 - m_e^2}[(m_n - m_p) - E]^2. \quad (6.27)$$

Juntando este resultado com (6.24), encontramos a taxa de decaimento pela energia do elétron

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{1}{\pi^3} \left(\frac{g_W}{8m_W^2} \right)^4 E\sqrt{E^2 - m_e^2}[(m_n - m_p) - E]^2. \quad (6.28)$$

Este resultado gera o espectro de distribuição de energias do elétron que iniciou o problema do decaimento beta. Saindo de um valor mínimo de $E_{min} = m_e$ até o máximo $E_{max} = m_n - m_p$ como mostrado na figura 16.

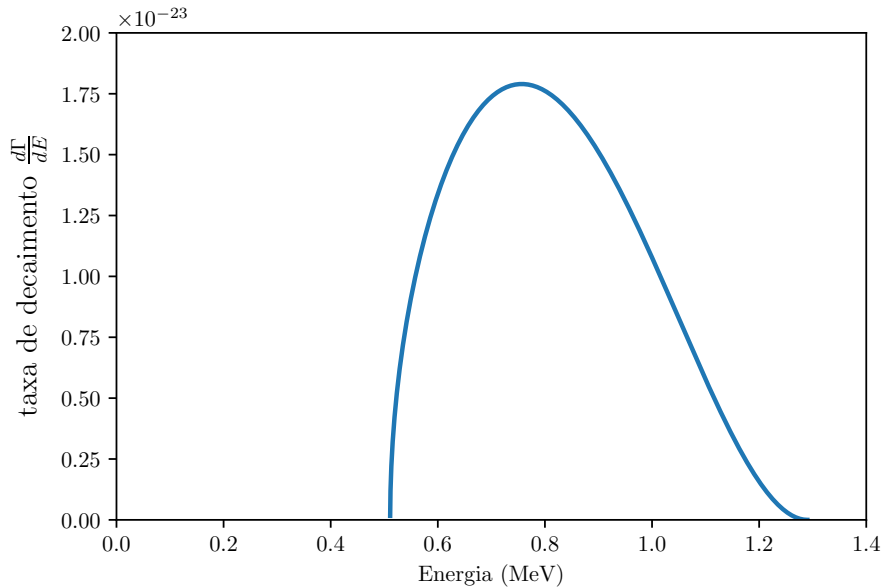


Figura 16 – Taxa de decaimento em função da energia do elétron emitido.

Integrando a equação (6.28), obtemos a taxa de decaimento total

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{g_W}{8m_W^2} \right)^4 m_e^5 \left[\frac{1}{15} (2a^4 - 9a^2 - 8) \sqrt{a^2 - 1} + a \ln \left(a + \sqrt{a^2 - 1} \right) \right], \quad (6.29)$$

sendo $a = (m_n - m_p)/m_e$. Com este resultado, calculamos o valor da vida média do nêutron como sendo

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = 1318s \quad (6.30)$$

enquanto que o valor experimental é de 879.4 ± 0.6 segundos (WIETFELDT; GREENE, 2011). Aqui encontramos um problema em nossos achados. O motivo para esta discrepância está no início de tudo, quando consideramos o próton e o nêutron como partículas de Dirac fundamentais. Sabemos que estas partículas não são fundamentais, quando na verdade são feitas de quarks! Para se derivar uma expressão para a taxa de decaimento mais precisa, precisamos levar em consideração a estrutura interna no próton e do nêutron descrita pela cromodinâmica quântica, que não é nada simples e envolve diversos fenômenos internos como emissão de glúons virtuais pelos quarks, criação e aniquilação de pares de quark e anti-quark dentro do próton (GRIFFITHS, 2008). De um ponto de vista eletromagnético, estes efeitos não fazem diferença pois eles conservam a carga do próton $+e$, entretanto, na força fraca, estes fenômenos internos podem alterar a forma como os quarks de valência do próton interagem para gerar o decaimento beta. Para levar em consideração estes efeitos, o vértice $(1 - \gamma^5)$ na interação fraca é repostado por $(C_V - C_A \gamma^5)$, sendo C_V um termo de correção para a parte vetorial da carga fraca e C_A para a parte axial da carga fraca. Estes dois termos são medidos experimentalmente com valores de $C_V = 1.000$ e $C_A = 1.270 \pm 0.003$ (GRIFFITHS, 2008).

As medidas experimentais nos mostram que a parte vetorial da carga fraca é conservada nas interações fortes dentro do núcleon. Se adicionarmos isso na derivação da taxa de decaimento do nêutron é aumentada por um fator de $1/4(C_V^2 + 3C_A^2) = 1.46$ e a vida-média do nêutron cai por este fator. Temos então $\tau = 901s$. De forma mais precisa, podemos considerar o diagrama de Feynman para o decaimento beta como sendo

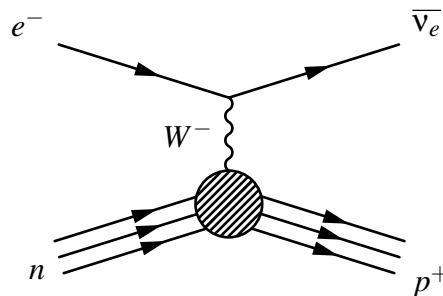


Figura 17 – Diagrama de Feynman para o decaimento beta levando em consideração a estrutura interna do nêutron e do próton.

O processo pode se complicar ainda mais caso consideremos as partículas incidentes na interação dentro de um núcleo atômico. Geralmente introduzimos fatores de forma F que representam nossa ignorância sobre a estrutura interna do núcleo atômico. Estes fatores de forma são limitados por algumas regras de invariância dependendo do problema em questão e podem ser medidos experimentalmente.

6.3 Medição do número de famílias interagentes de neutrinos

Consideremos agora o processo $e^+ + e^- \rightarrow f^+ + f^-$ mediado por um bóson neutro Z^0 , isto é, uma aniquilação elétron-pósitron que gera outros dois férmions f^+ e f^- que sejam diferentes de e^+ e e^- , pois se incluíssemos este processo, teríamos que considerar outros diagramas de interação que não consideremos aqui já que $f \neq e$ ¹. Este processo, em ordem mais baixa e consequentemente com maior probabilidade pode ser expresso por 18.

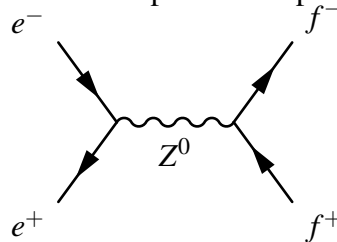


Figura 18 – Geração de férmions pela aniquilação $e^- + e^+$ mediada por um bóson neutro Z^0 .

Para construirmos a amplitude de espalhamento \mathcal{M} deste processo, precisamos do propagador do bóson Z^0 , dado no apêndice C.

$$G_{\mu\nu}^Z(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_Z^2}}{p^2 - m_Z^2} \quad (6.31)$$

Este processo é particularmente interessante no regime de energias próximo à energia de repouso do bóson $Z^0 = 91.18$ GeV. Ou seja, estamos interessados no caso em que $p^2 \approx m_Z^2$. Neste caso, a amplitude de espalhamento do processo é dada como

$$\mathcal{M} = -\frac{g_Z^2}{4(q^2 - m_Z^2)} \left[\bar{u}(p_4) \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5) v(p_3) \right] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2} \right) \left[\bar{v}(p_2) \gamma^\nu (C_V^e - C_A^e \gamma^5) u(p_1) \right], \quad (6.32)$$

onde p_1, p_2, p_3 e p_4 são os momentos respectivamente dos e^-, e^+, f^+ e f^- . Além disso, estamos usando q como a transferência de momento mediada pelo bóson Z^0 dado por $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Os valores de C_V e C_A para diferentes férmions está encontrado na tabela 3.

¹ O processo incluindo a o caso em que $f = e$ é conhecido de espalhamento Bhabha e pode ser encontrado em (GREINER; REINHARDT, 2008)

férmion	C_V	C_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e, μ, τ	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2(\theta_W)$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2(\theta_W)$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2(\theta_W)$	$-\frac{1}{2}$

Tabela 3 – Valores de C_V e C_A para diferentes férmions.

Como estamos trabalhando em um regime de energias próximo de 90 GeV podemos ignorar a massa dos férmions (incluindo o elétron) participantes do processo quando comparadas à massa do Z^0 . Dessa forma, ao aplicarmos o truque de Casimir como feito na seção anterior, obteremos apenas os momentos $\gamma^\mu p_\mu$ ao invés de $\gamma^\mu p_\mu - m$. No termo após o propagador em (6.32), q se contrai com γ resultando na contribuição

$$\bar{u}(p_4)\gamma^\mu p_\mu(C_V - C_A\gamma^5)v(p_3), \quad (6.33)$$

porém, $\gamma^\mu q_\mu = \gamma^\mu p_{3\mu} + \gamma^\mu p_{4\mu}$ e $\bar{u}(p_4)\gamma^\mu p_{4\mu}$ é justamente a equação de Dirac sem massa para um férmion de momento p_4 , ou seja, pela equação de Dirac $\bar{u}(p_4)\gamma^\mu p_{4\mu} = 0$. Igualmente $\gamma^\mu p_{3\mu}v(p_3) = 0$ é a equação de Dirac para um anti-férmion sem massa de momento p_3 (Sabemos que os férmions tem massa sim, mas da perspectiva energética do bóson Z^0 , eles parecem férmions não massivos).

$$\mathcal{M} = -\frac{g_Z^2}{4(q^2 - m_Z^2)} \left[\bar{u}(p_4)\gamma^\mu(C_V^f - C_A^f\gamma^5)v(p_3) \right] \left[\bar{\nu}(p_2)\gamma_\mu(C_V^e - C_A^e\gamma^5)u(p_1) \right]. \quad (6.34)$$

Após o truque de Casimir, temos

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \left(\frac{g_Z^2}{8(q^2 - m_Z^2)} \right)^2 \text{Tr} \left[\gamma^\mu(C_V^f - C_A^f\gamma^5)\gamma^\alpha p_{3\alpha}\gamma^\nu(C_V^f - C_A^f\gamma^5)\gamma^\beta p_{4\beta} \right] \times \\ &\times \text{Tr} \left[\gamma_\mu(C_V^e - C_A^e\gamma^5)\gamma^\delta p_{1\delta}\gamma_\nu(C_V^e - C_A^e\gamma^5)\gamma^\phi p_{2\phi} \right] \end{aligned} \quad (6.35)$$

Podemos reescrever o traço em termos dos momentos, resultando em

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_Z^2}{8(q^2 - m_Z^2)} \right)^2 \left[\left((C_V^f)^2 + (C_A^f)^2 \right) \left((C_V^e)^2 + (C_A^e)^2 \right) \left((p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + \right. \right. \\ &\left. \left. + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \right) + 4C_V^f C_A^f C_V^e C_A^e \left((p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

No referencial do centro de massa do sistema, reescrevemos (6.36) como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \left(\frac{g_Z^2 E^2}{(2E)^2 - m_Z^2} \right)^2 \left[\left((C_V^f)^2 + (C_A^f)^2 \right) \left((C_V^e)^2 + (C_A^e)^2 \right) (1 + \cos^2 \theta) - 8C_V^f C_A^f C_V^e C_A^e \cos \theta \right], \quad (6.37)$$

sendo E a energia total de cada partícula e θ o ângulo entre \vec{p}_1 e \vec{p}_3 . Com isso, podemos calcular a seção de choque diferencial com o ângulo sólido $d\Omega$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{g_Z^2 E}{16\pi ((2E)^2 - m_Z^2)} \right)^2 \left[\left((C_V^f)^2 + (C_A^f)^2 \right) \left((C_V^e)^2 + (C_A^e)^2 \right) (1 + \cos^2 \theta) - 8C_V^f C_A^f C_V^e C_A^e \cos \theta \right] \quad (6.38)$$

Realizando a integral sobre o ângulo sólido $d\Omega$, obtemos a seção de choque total para este processo

$$\sigma = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{g_Z^2 E}{4((2E)^2 - m_Z^2)} \right)^2 \left((C_V^f)^2 + (C_A^f)^2 \right) \left((C_V^e)^2 + (C_A^e)^2 \right), \quad (6.39)$$

e vemos que a seção de choque explode para infinito quando E se aproxima de m_Z^2 , fisicamente isso não faz sentido, a seção de choque não pode ser infinito. Porém, nem tudo está perdido, a salvação está no fato de que o bóson Z^0 não é uma partícula estável. O tempo de vida-média do bóson Z^0 deve ser levado em consideração ao se calcular o propagador, adicionando o termo $im_Z\Gamma_Z$ no denominador. Experimentalmente, $\Gamma_Z = 3.791 \pm 0.003 \cdot 10^{24}$ /s. Este termo muda a seção de choque total para a forma

$$\sigma = \frac{g_Z^2 E^2}{48\pi} \frac{\left((C_V^f)^2 + (C_A^f)^2 \right) \left((C_V^e)^2 + (C_A^e)^2 \right)}{\left((2E)^2 - m_Z^2 \right)^2 + (m_Z \Gamma_Z)^2}. \quad (6.40)$$

A figura 19 mostra o pico na seção de choque dos processos $e^+ + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + \nu_e$ e $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ perto da energia de repouso do bóson Z^0 . Nela podemos ver que a perto deste pico de ressonância, a interação por intermédio do bóson Z^0 se torna dominante.

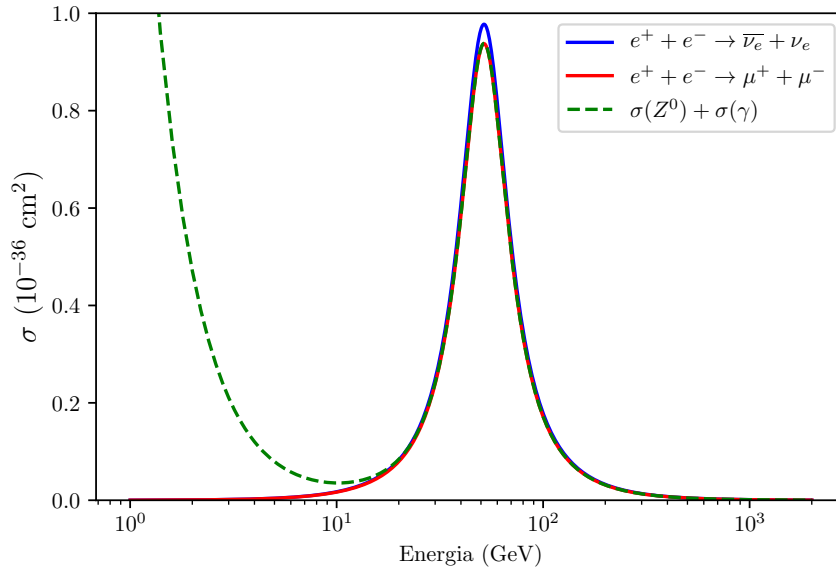


Figura 19 – Seção de choque dos processos I) $e^+ + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + \nu_e$ (azul) e II) $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ (vermelho) perto da energia de repouso do bóson Z^0 . A curva tracejada verde é a seção de choque total do processo I levando em consideração também a mediação por fótons onde sua seção de choque é calculada em (GRIFFITHS, 2008).

Interessantemente, a altura do pico de ressonância depende diretamente do número de famílias possíveis para cada tipo de férmion produzido. A taxa de decaimento Γ_Z pode ser reescrita em termos da soma das taxas de decaimento do bóson Z^0 em cada par de férmions, incluindo os neutrinos. Esta taxa de decaimento $\Gamma_{Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu}}$ possui um fator N_ν que diz respeito ao número de famílias interagentes via força fraca de neutrinos. Com isso, a medição da seção de choque do processo $e^+ + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + \nu_e$ perto do pico de ressonância oferece uma excelente medida para se determinar N_ν e saber se existe uma possível quarta família de férmions no modelo padrão (GIUNTI; KIM, 2007). Entre os anos de 1989 e 1995 os experimentos *Large Electron Positron* (LEP) no CERN observaram 17 milhões de decaimentos Z^0 para obter a seção de choque das produções dos possíveis pares de férmions. O valor encontrado nestes experimentos foi de $N_\nu = 2.9840 \pm 0.0082$ (COLLABORATION et al., 2005). O que nos mostra experimentalmente que caso um quarto tipo de neutrino seja descoberto, ele não pode interagir via força eletrofraca.

6.4 Absorção do neutrino pelo argônio

Até aqui lidamos com interações envolvendo neutrinos e partículas subatômicas apenas. Quando nos perguntamos a respeito das características das interações com um núcleo atômico inteiro, vários problemas, de um ponto de vista analítico, surgem. Primeiro, a estrutura interna

de um núcleo atômico de vários prótons e nêutrons é dificilmente descrita de forma analítica². Segundo, algumas raras interações entre o neutrino o núcleo atômico podem ocorrer de forma que o núcleo se comporte como se não possuísse estrutura interna, como o espalhamento coerente de neutrinos (CEvNS). Neste fenômeno o neutrino interage com o núcleo como um todo, ao invés de interagir com apenas um de seus constituintes (AKIMOV et al., 2017). Por exemplo, no decaimento beta inverso, temos um neutrino elétron ν_e interagindo com um núcleo atômico Z, A e resultando em um elétron e^- e um núcleo atômico $Z + 1, A$. Entretanto, nesta interação o que ocorre de verdade é a interação do neutrino com um quark down constituinte do nêutron, transformando o quark down em um quark up, e por consequência, o nêutron se torna um próton, aumentando o número atômico do núcleo.

A ideia do espalhamento coerente é que o neutrino sofra um desvio ao "se chocar" com o núcleo, e o núcleo sofra um recuo como resultado. Dessa forma, o neutrino troca um bóson não carregado (Bóson Z) com o núcleo inteiro.

No caso do argônio, nenhuma seção de choque experimental já foi medida para interações envolvendo neutrinos. Diversos modelos computacionais já foram feitos para computar esta seção de choque para diferentes faixas de energia, dentre eles, destacamos o *Model of Argon Reaction Low Energy Yields* (MARLEY)³ (GARDINER, 2018). Neste modelo uma aproximação é obtida para a seção de choque da interação via corrente carregada (CC) do neutrino com o argônio $\nu_e + {}^{40}\text{Ar} \rightarrow e^- + {}^{40}\text{K}^*$ utilizando uma combinação de medidas experimentais associadas a elementos que participam da simulação como as energias dos estados de ligação nuclear do argônio, e cálculos numéricos para os elementos sem medidas experimentais.

Para neutrinos provenientes de supernova, que possuem energias menores que 100 MeV, MARLEY encontrou uma seção de choque em função da energia, para processos CC, na forma mostrada pela figura

² A descrição da estrutura interna de um núcleo atômico se encontra no reino da força nuclear forte descrito pela cromodinâmica quântica, fora do escopo deste trabalho. Entretanto, vale lembrar aqui que a cromodinâmica quântica é uma teoria sem liberdade assintótica na escala de energias típica da teoria, o que dificulta consideravelmente o uso de teoria de perturbação para descrever interações.

³ Descrições sobre o modelo podem ser encontradas livremente em marleygen.org

Parte II

Supernovas

7 Supernovas

Tendo finalizado todo o desenvolvimento teórico necessário em torno da física de partículas de neutrinos, voltamos nossa atenção agora para o processo de estudo deste trabalho, com respeito à geração destes neutrinos, as supernovas. Neste capítulo iremos discutir brevemente o processo de colapso estelar que levará às supernovas, entretanto, não entraremos em detalhes profundos à respeito da dinâmica estelar, uma vez que o foco principal deste trabalho está nos neutrinos e sua subsequente detecção. É importante ressaltar que, neste trabalho focaremos nas supernovas de colapso estelar, ou seja, quando mencionado supernova, não estaremos incluindo supernovas do tipo Ia (TURATTO, 2003).

O leitor curioso pode procurar por (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2008) e (KEMP et al., 2000), principais referências utilizadas para este capítulo.

7.1 O ciclo de vida estelar

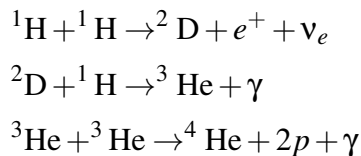
Na China antiga, durante o fim da dinastia Han, no ano de 185, há relatos da visualização no céu de uma estrela visitante, que apareceu de repente, brilhando fortemente e após semanas, desapareceu. Inicialmente, estudiosos modernos acreditaram que esta estrela visitante foi, na verdade, um cometa (CHIN; HUANG, 1994). Entretanto, mais recentemente as evidências apontam que esta estrela visitante foi provavelmente o primeiro registro confirmado feito de uma supernova no céu, o fim do ciclo de vida de uma estrela em uma gigantesca explosão (ZHAO; STROM; JIANG, 2006). Mais tarde, no ano de 393, durante a dinastia Qing, mais um relato foi registrado de uma estrela visitante no céu e novamente, observações astronômicas indicam que esta estrela visitante pode ter sido uma supernova (WANG; QU; CHEN, 1997). A visualização mais recente no céu do fim de uma estrela foi no ano de 1987, como já mencionado neste trabalho.

Estrelas, assim como nosso sol, são enormes corpos astrofísicos, sustentados por sua própria gravidade. Estes corpos celestes brilham através da fusão nuclear em seus núcleos de elementos leves em elementos mais pesados. De início, as estrelas fundem o hidrogênio em hélio, e seguem fundindo os elementos resultantes da fusão anterior até eventualmente pararem no ferro. Formadas em regiões do espaço que possuem densidades de matéria mais altas, em enormes nuvens gasosas compostas, em sua maioria, de hidrogênio, chamadas de berçários estelares, tal como a nebulosa de Órion (Figura 20) (LADA; LADA, 2003).

Após a acreção de massa na nuvem gasosa atingir o limite de $0.08M_{\odot}$ ¹, a temperatura e pressão no núcleo são altas o suficiente para se iniciar a fusão nuclear do hidrogênio em hélio

¹ M_{\odot} é a massa solar. Em astrofísica, as medidas de massa são frequentemente utilizadas em termos da massa do Sol M_{\odot} .

por diversos caminhos, como a cadeia próton-próton (ou cadeia p-p). Na cadeia p-p, dois átomos de hidrogênio (^1H) em um deutério (^2D), devido ao decaimento beta de um deles, emitindo um pósitron e um neutrino elétron. O deutério é então fundido com outro átomo de hidrogênio, formando o hélio-3 (^3He). Dois núcleos de ^3He então se fundem, originando a forma mais estável ^4He e liberando dois prótons.



Além deste processo, diversas cadeias de fusão ocorrem de forma a liberar energia. Deste ponto em diante, as estrelas passam a maior parte de suas vidas na sequência principal² (salvo algumas exceções de anãs brancas e supergigantes), fundindo hidrogênio em hélio, depois o hélio em carbono, carbono em neônio e oxigênio, depois o silício e por fim o ferro.



Figura 20 – Imagem capturada da nebulosa de Órion pelo telescópio espacial Hubble em 2006. A imagem foi produzida através da detecção em diversas frequências do espectro eletromagnético, dentro e fora da região do visível.

² A sequência principal é uma região contínua observada em gráficos de cor por luminosidade. A maioria das estrelas se encontram nesta região, obedecendo relações bem estabelecidas entre sua cor (dada por sua temperatura) e sua luminosidade. Um ótimo vídeo no Youtube sobre o tamanho e a vida das estrelas (de forma resumida) pode ser encontrado no canal Kurzgesagt - In a Nutshell com o título [The biggest star in the universe](#).

7.2 O início do colapso

Como já descrito na sessão anterior, estrelas massivas (com massas entre $8M_{\odot}$ a $70M_{\odot}$) vivem por alguns milhões de anos, usufruindo a energia proveniente da fusão termonuclear de elementos leves em elementos cada vez mais pesados, até a formação do ferro, o núcleo atômico com a maior energia de ligação por núcleon, assim, a formação de elementos mais pesados requer o consumo de energia (reações endotérmicas) ao invés da liberação. Nestas estrelas, o núcleo estelar é composto, de forma homogênea, majoritariamente por ferro e sustentado pela pressão degenerativa de elétrons, associada à distribuição de Fermi-Dirac para férmions, impedindo que mais de um elétron ocupe o mesmo estado quântico ao mesmo tempo, resultando em uma pressão que se opõe à compressão da matéria. Em frações de segundo, após o combustível para a fusão acabar, a estrela colapsa sobre sua própria atração gravitacional e imediatamente explode em uma supernova. Assim, morre uma estrela e nasce uma estrela de nêutrons, ou até mesmo um buraco negro.

A ideia original para a descrição dos fenômenos de supernovas de colapso estelar foi sugerido na década de 60 e aprimorado com os avanços da física nuclear e partículas principalmente. O modelo, mais refinado, pode ser descrito da seguinte forma: o colapso devido à gravidade faz com que o núcleo da estrela se contraia até atingir densidades onde a pressão gerada pela repulsão núcleon-núcleon impede que a compressão continue. A matéria que continua a ser atraída pela força gravitacional, "ricocheteia" no "caroço" do núcleo devido à resistência que ali encontra e inverte seu sentido de movimento, devido à conservação do momento. A energia acumulada nesse processo inicia uma onda de choque. A descompressão imediata do núcleo fornece o impulso adicional ao choque, que adquire energia suficiente para desagregar e expelir de forma explosiva as camadas externas da estrela. A potência do choque é mantida com a energia extra depositada na matéria pelo fluxo emergente dos neutrinos que permaneceram em difusão pelo núcleo estelar (KEMP et al., 2000).

Para descrever como o processo de colapso estelar se inicia, consideraremos primeiro o teorema do Virial que descreve o balanço energético de corpos astrofísicos através da equação

$$2E_T = -E_p = f \frac{GM^2}{R}, \quad (7.1)$$

onde E_T é a energia térmica interna ao corpo, E_p é a energia potencial gravitacional que tende a comprimir o corpo sobre si mesmo, G é a constante universal da gravitação $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N.kg²/m², R é o raio do objeto, M a massa e f é a constante de Fermi, $f = 0.6$ para objetos esfericamente simétricos e de densidade ρ constante.

Durante a maior parte de sua existência, as estrelas estão em equilíbrio hidrostático, descrito pela equação

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (7.2)$$

As estrelas massivas, após chegarem à última etapa da cadeia de fusão nuclear, possuem um núcleo com a temperatura em torno de 10^9 K ($kT \approx 0.7$ MeV) e densidade $\rho \approx 10^{10}$ g/cm³ (BURROWS, 1990). Neste momento entra em jogo o limite de Chandrasekhar, que delimita o valor máximo de massa para o núcleo estelar sustentado pela pressão de degenerescência dos elétrons

$$1.2 \leq M_{ch} \leq 1.5M_{\odot}, \quad (7.3)$$

7.3 A explosão

Momentos antes do "ricocheteio", a densidade altíssima no núcleo estelar transforma a matéria opaca aos neutrinos, uma vez que o livre caminho médio fica em torno de 1 km³, muito menor comparado ao diâmetro típico do núcleo de 100 km. Este fato faz com que, desde os momentos primordiais após o *Bing-Bang* onde toda a matéria do universo estava densamente compactada, o núcleo estelar pré-supernova seja a única região do universo opaca a neutrinos (BROCKWAY; CARLSON; RAFFELT, 1996).

Seguindo o aumento de pressão no núcleo devido ao peso das demais camadas da estrela, a matéria passa por uma transição de fase. A pressão de degenerescência de Fermi, que antes sustentava o núcleo, agora já não é o suficiente e passa a prevalecer a repulsão núcleon-núcleon. A pressão gerada pelo plasma nuclear $P = k\rho^\gamma$, que antes era dominada pela densidade dos elétrons relativísticos $\gamma = 4/3$ passa a ser dominada pela densidade de núcleons não-relativísticos $\gamma = 5/3$, aumentando a pressão interna do núcleo em uma ordem de grandeza e criando o "caroço" rígido.

Após à compressão máxima do núcleo, as camadas externas da estrela são rebatidas pela onda de choque que percorre toda a estrela, expelindo sua massa e deixando para trás uma estrela de nêutrons, ou um buraco negro, a depender da eficiência do processo de transporte de energia em impedir o acúmulo de massa no núcleo para a formação de um buraco negro (KEMP et al., 2000).

³ Essa afirmação significa dizer que em média um neutrino no núcleo estelar viaja 1 km antes de sofrer alguma interação.

8 Geração de Neutrinos em Supernovas

Agora que já sabemos como as estrelas morrem, resta a nós responder como os neutrinos são gerados durante o processo de colapso estelar. Neste capítulo, focaremos exatamente em responder essa pergunta com o que já vimos no decorrer do trabalho envolvendo as interações de neutrinos.

8.1 Processos de produção de neutrinos

As altas energias encontradas dentro do núcleo estelar promovem a formação de neutrinos principalmente pelos processos de aniquilação de pares e^+e^- , produção por fótons e processos nucleares como o efeito Urca (HAENSEL, 1995). Cada um desses processos contribui para a perda de energia da estrela durante o colapso estelar.

Buscamos calcular como alguns destes processos de geração de neutrinos afetam a evolução estelar, para isso, consideraremos a estrela um gás totalmente ionizado e em equilíbrio térmico à temperatura T e densidade ρ . Neste gás (estrela), o numero de elétrons e pósitrons é dado pela estatística de Fermi-Dirac¹

$$n_{\pm} = \int dn_{\pm} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{e^{(\frac{E}{kT} \mp \frac{\mu}{kT})} + 1}. \quad (8.1)$$

É razoável presumir que nosso gás é eletricamente neutro, sendo assim o numero de prótons n_p igual ao numero de elétrons total menos o numero de pósitrons, $n_p = n_- - n_+$. Entretanto, como a massa do elétron (e do pósitron) é 1836 vezes menor que a do próton, desconsideraremos a massa deles, dessa forma a densidade ρ do gás é

$$n_0 = n_- + n_+ = \frac{N\rho}{\mu_e}, \quad (8.2)$$

onde N é a constante de avogrado, μ_e é relacionada com a abundância X_i , a carga nuclear Z_i e o peso atômico A_i do i -ésimo isótopo nuclear no plasma

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i X_i \frac{Z_i}{A_i}. \quad (8.3)$$

¹ Para mais detalhes sobre a estatística de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, verifique (SALINAS, 2001; SCHWABL, 2006)

A taxa de perda de energia para pares de neutrinos emitidos, usualmente denominada de emissividade, é dada pela probabilidade de transição de um processo gerador de neutrinos, multiplicado pela energia do par integrada sobre a densidade de estados de todas as partículas iniciais e finais ². Para os elétrons e pósitrons, essa densidade de estados é dada pela equação (8.1). Já os fótons envolvidos, possuem sua distribuição descrita pela estatística de Bose-Einstein

$$dn_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{kT}} - 1} d^3k, \quad (8.4)$$

e os neutrinos, nos instantes da produção por pares onde ainda passam sem interagir pela estrela, possuem uma distribuição de Fermi-Dirac com $T = 0$, portanto

$$dn_q = \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \quad (8.5)$$

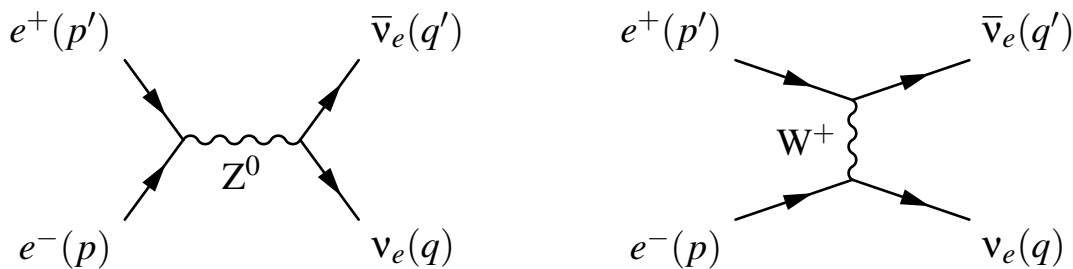
$$dn_{q'} = \frac{d^3q'}{(2\pi)^3}. \quad (8.6)$$

Estamos assumindo aqui, a ocorrência do fenômeno de produção antes dos instantes em que o núcleo estelar se torna opaco à neutrinos ($T \neq 0$). Este é um argumento razoável, uma vez que o sinal de neutrinos da supernova chega aos detectores antes do sinal luminoso, indicando que estes são produzidos antes dos momentos finais do colapso.

8.1.1 Aniquilação de pares

Durante o início do colapso, as temperaturas e densidades nucleares são baixas demais para induzir a produção de neutrinos por processos de aniquilação de pares $e^+ + e^-$, porém, conforme o núcleo é comprimido, as temperaturas chegam à ordem de 10 MeV ($\approx 10^{10}$ K) e a produção de neutrinos ν_e e $\bar{\nu}_e$ via processos de aniquilação de pares disparam.

Dois processos podem representar a aniquilação de pares gerando pares de neutrinos e anti-neutrinos



O elemento de matriz total é dado pela soma dos dois canais de interação, tanto o via corrente neutra como o via corrente carregada, usando os valores de C_A e C_V , podemos escrever

² Geralmente representa-se a emissividade em unidades de ergs/s.cm³.

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{8m_W^2} \bar{u}_\nu(q) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_\nu(q') \bar{\nu}_e(p') \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) u_e(p), \quad (8.7)$$

agora devemos elevar \mathcal{M} ao quadrado, tomar a média e a soma sobre os spins e integrar sobre os momentos finais (assim como feito em maiores detalhes no capítulo 6) e nos utilizando da fórmula de Lenard

$$\int \frac{1}{2q^0} \frac{1}{2q'^0} \delta^4(P - q - q') q^\mu q'^\nu d^3q d^3q' = \frac{\pi}{24} (2P^\mu P^\nu + g^{\mu\nu} P^2). \quad (8.8)$$

A soma dos possíveis spins finais, junto com a média sobre os spins iniciais e $|\mathcal{M}|^2$ pode ser escrita como

$$\sum_s |\mathcal{M}|^2 = \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{\sigma_3, \sigma_4} |\mathcal{M}|^2, \quad (8.9)$$

o primeiro somatório, juntamente com as duas frações meio, está associado ao fato de termos duas partículas iniciais, enquanto que o segundo somatório está associado às duas partículas finais da interação. Lembrando que $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^* \mathcal{M}$ e $(\bar{u} \gamma^\mu v)^* = (u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v)^\dagger = v^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 u = \bar{v} \gamma^\mu u$, podemos reescrever os termos do tipo $\sum_{\sigma_1, \sigma_2} (\bar{u}_\nu \gamma^\alpha v_\nu) (\bar{\nu}_\nu \gamma^\beta u_\nu)$ como

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} \bar{u}_{\nu\mu} \gamma_{\mu\eta}^\alpha v_{\nu\eta} \bar{\nu}_{\nu\xi} \gamma_{\xi\delta}^\beta u_{\nu\delta}. \quad (8.10)$$

Assim, movemos $u_{\nu\delta}$ de lugar afim de usar a relação de completude $\sum_{\sigma_1} u_{\nu\delta} \bar{u}_{\nu\mu} = (\gamma_\xi^\delta P_{\nu\xi} + m_\nu)_{\delta\mu}$. Assumimos ainda a massa dos neutrinos como sendo desprezível e utilizamos o truque de Casimir

$$\sum_{\text{Todos os spins}} (u(a) \gamma_1 u(b)) (\bar{u}(a) \gamma_2 u(b))^* = Tr(\gamma_1 (\gamma^\mu P_{\mu b} + m_b) \gamma_2 (\gamma^\nu P_{\nu a} + m_a)), \quad (8.11)$$

chegamos finalmente a

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G^2}{8} Tr[\gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\gamma^\delta P_{\nu\delta}) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) (\gamma^\xi P_{\bar{\nu}\xi}) \gamma_\alpha (C_V - C_A \gamma_5) (\gamma^\delta P_{e\delta} + m_e) \times \quad (8.12)$$

$$\times \gamma_\beta (C_V - C_A \gamma_5) (\gamma^\xi P_{e\xi} + m_e)]$$

usando ainda

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu \gamma^\lambda p_{\lambda 1} \gamma^\nu \gamma^\sigma p_{\sigma 3}) &= (p_1)_\lambda (p_3)_\sigma Tr(\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma) = 4(p_1)_\lambda (p_3)_\sigma (g^{\mu\nu} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + \\ &+ g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu}) = 4[p_1^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) + p_3^\mu p_1^\nu] \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$Tr(\gamma^\mu (\gamma^\alpha p_{\alpha 1} + m) \gamma^\nu (\gamma^\beta p_{\beta 3} + m)) = 4[p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 - (p_1 \cdot p_3))] \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma^\alpha p_{\alpha 1} + m_e) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \gamma^\beta p_{\beta 3}] &= 8[p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) - \\ &- i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{\alpha 1} p_{\beta 3}] \end{aligned} \quad (8.15)$$

chegamos ao resultado final para a probabilidade de transição $P_{e\nu}$ do processo

$$\begin{aligned} P_{e\nu} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8EE'} \int \frac{1}{2q^0} \frac{1}{2q'^0} \delta^4(p + p' - q - q') \sum_s |\mathcal{M}|^2 d^3 q d^3 q' = \\ &= \frac{G^2}{12\pi EE'} [(C_V^2 + C_A^2) [m_e^4 + 3m_e^2 p \cdot p' + 2(p \cdot p')^2] + 3(C_V^2 - C_A^2) (m_e^4 + m_e^2 p \cdot p')], \end{aligned} \quad (8.16)$$

onde E e E' são as energias do elétron e do pósitron, respectivamente. A taxa de perda de energia por meio destes processos é dada por

$$Q = \frac{4}{(2\pi)^6} \int \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} \frac{1}{e^{\frac{E'+\mu}{kT}} + 1} (E + E') P_{e\nu} d^3 p d^3 p' \quad (8.17)$$

Definimos agora, para simplificar as contas, $\lambda = kT/m$ e $\alpha = \mu/kT$. Também definimos a função $G_n^\pm(\lambda, \alpha)$ como

$$G_n^\pm(\lambda, \alpha) = \lambda^{3+2n} \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} \frac{x^{2n+1} (x^2 - \lambda^{-2})}{e^{x \pm \alpha} + 1} dx. \quad (8.18)$$

E podemos "simplificar" a expressão de Q para

$$\begin{aligned} Q &= \frac{G^2 m^9}{18\pi^5} [(7C_V^2 - 2C_A^2) (G_0^- G_{-1/2}^+ + G_{-1/2}^- G_0^+) + 9C_V^2 (G_{-1/2}^- G_0^+ + G_0^- G_{1/2}^+) + \\ &+ (C_V^2 + C_A^2) (4G_1^- G_{1/2}^+ + 4G_{1/2}^- G_1^+ - G_1^- G_{-1/2}^+ - G_{1/2}^- G_0^+ - G_0^- G_{1/2}^+ - G_{-1/2}^- G_1^+)]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

O cálculo numérico de Q depende do regime de λ e α (DICUS, 1972). Entretanto, os cálculos numéricos para estas integrais $G_n^\pm(\lambda, \alpha)$ e subsequentemente Q foram feitos por (PETROSIAN; BEAUDET; SALPETER, 1967). Os cálculos mostram que, em temperaturas próximas de 10^9 K, a emissividade é altamente dependente da densidade diminuindo conforme ρ aumenta (o que pode estar relacionado com o que inicialmente se foi considerado, de que os neutrinos não interagem ao serem criados, e assim escapam da estrela) (YAKOVLEV et al., 2001).

8.1.2 Produção pro fótons

Outro processo de produção de neutrinos durante o colapso estelar extremamente importante é a produção de neutrinos pela interação de fótons energéticos com elétrons, $\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_e$. Neste processo, os elétrons emitem um bóson W , que resulta em um antineutrino elétron $\bar{\nu}_e$.

As duas interações resultam em uma amplitude de interação dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W = & -\frac{ieg^2}{8m_W^2} \bar{u}_\nu(q) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\gamma^\mu p_\mu + \gamma^\beta k_\beta - m_e)^{-1} \gamma^\sigma \epsilon_\sigma u_e(p) \bar{u}_e(p') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}(q') - \quad (8.20) \\ & -\frac{ieg^2}{8m_W^2} \bar{u}_e(p') \gamma^\delta \epsilon_\delta (\gamma^\xi p'_\xi - \gamma^\phi k_\phi - m_e)^{-1} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}(q') \bar{u}_\nu(q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_e(p). \end{aligned}$$

Alem disso, o processo pode ocorrer pelo intermédio de um bóson Z , com uma amplitude de espalhamento

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Z = & \frac{ie}{16m_Z^2} \bar{u}_e(p') \gamma^\alpha (a + b\gamma_5) (\gamma^\mu p_\mu + \gamma^\beta k_\beta - m_e)^{-1} \gamma^\sigma \epsilon_\sigma u_e(p) \bar{u}_\nu(q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}(q') + \quad (8.21) \\ & + \frac{ie}{16m_Z^2} \bar{u}_e(p') \gamma^\delta \epsilon_\delta (\gamma^\xi p'_\xi - \gamma^\phi k_\phi - m_e)^{-1} \gamma^\alpha (a + b\gamma_5) u_e(p) \bar{u}_\nu(q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}(q'), \end{aligned}$$

onde

$$a = 3g'^2 - g^2 \quad (8.22)$$

$$b = g'^2 + g^2 \quad (8.23)$$

A soma total $\mathcal{M}_W + \mathcal{M}_Z$ pode ser reescrita de forma mais simples utilizando a identidade de Fierz (OKUN, 2013)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{ieg^2}{8m_W^2} \bar{u}_e(p') \gamma^\alpha (C_V - C_A \gamma_5) \frac{\gamma^\mu p_\mu + \gamma^\beta k_\beta + m_e}{2p \cdot k + \omega_0^2} \gamma^\rho \epsilon_\rho u_e(p) \bar{u}_\nu(q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}(q') - \quad (8.24) \\ & -\frac{ieg^2}{8m_W^2} \bar{u}_e(p') \gamma^\xi \epsilon_\xi \frac{\gamma^\phi p'_\phi - \gamma^\sigma k_\sigma + m_e}{-2p' \cdot k + \omega_0^2} \gamma^\alpha (C_V - C_A \gamma_5) u_e(p) \bar{u}_\nu(q) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{\bar{\nu}}(q'). \end{aligned}$$

Aqui, $k^2 = \omega_0^2$ para incluir os efeitos de plasma. Usualmente, elevamos \mathcal{M} ao quadrado, somamos sobre todos os spins de elétrons e neutrinos e integramos sobre todos os momentos. Por fim, somamos sobre os possíveis estados de polarização do fóton. Escolhemos $\epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon})$ de forma que no referencial de repouso do elétron inicial, o produto

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p}) = 0 \quad (8.25)$$

$$\sum (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p}')^2 = |\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{p}' \cdot \vec{k})^2}{|\vec{k}|^2}. \quad (8.26)$$

Com uma transformação de Lorentz para o referencial de laboratório, que viaja com velocidade \vec{P}/E relativa ao referencial de repouso do elétron, temos

$$\sum (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p})^2 = \sum (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p})(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p}') = 0 \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \sum (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p}')^2 &= \frac{1}{(k \cdot p)^2 - m^2 \omega_0^2} \left[\frac{1}{2} (2p \cdot k + \omega_0^2)(2p' \cdot k - \omega_0^2)(m^2 - p' \cdot p) + m^2 [k \cdot (p + k - p')]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \omega_0^2 (m^2 + p \cdot p')(p + k - p')^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Feito tudo isso, o resultado final de tudo pode ser chamado de I , sendo que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(2\pi)^4}{2q^0 2q'^0} \delta^4(P - q - q') \sum_e \sum_s |\mathcal{M}|^2 d^3 q d^3 q' = \frac{2G^2 e^2}{3\pi} (C_V^2 + C_A^2) \times \\ &\quad \times \left[4P^2 + 2\beta\gamma(P^2 + m^2)(k \cdot P)^2 + 2\beta\gamma\omega_0^2 P^2 \left(P^2 - 2m^2 - k \cdot P + \frac{1}{2}\omega_0^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\omega_0^2 (\beta - \gamma)^2 P^2 (P^2 - m^2) + [\gamma^2 P^2 (P^2 - m^2) + \beta\gamma\omega_0^2 (P^2 + m^2)] \frac{1}{(k \cdot p)^2 - m^2 \omega_0^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{2}{\beta\gamma} (m^2 - p \cdot p') + m^2 (k \cdot P)^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 P^2 (m^2 + p' \cdot p) \right] \right] + \frac{2G^2 e^2}{3\pi} (C_V^2 - C_A^2) m^2 \times \\ &\quad \times \left[6\gamma^2 \omega_0^2 P^2 + 6\beta^2 \omega_0^2 P^2 + 4\beta\gamma P^2 \omega_0^2 - 8\beta\gamma (k \cdot p)^2 + \frac{3\gamma^2 P^2 - \beta\gamma\omega_0^2}{(k \cdot P)^2 - m^2 \omega_0^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{2}{\beta\gamma} (m^2 - p' \cdot p) + m^2 (k \cdot P)^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 P^2 (m^2 + p' \cdot p) \right] \right], \end{aligned} \quad (8.29)$$

onde $P = p + k - p'$, $\beta^{-1} = k \cdot p + \omega_0^2/2$ e $\gamma^{-1} = k \cdot p' - \omega_0^2/2$. A perda de energia através desse processo envolvendo elétrons é dada por

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^7} \int_0^\infty \frac{p^2}{E(e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1)} dp \int_0^\infty \frac{k^2}{\omega(e^{\frac{\omega}{kT}} - 1)} dk \int_{-1}^1 dz \int \frac{1}{E'} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{E'-\mu}{kT}} + 1} \right) (E + \omega - E') Id^3 p' \quad (8.30)$$

Assim como no processo devido à produção por pares, as integrais são feitas de forma numérica. Somando as formas de perda de energia, soma-se cerca de 99% da energia emitida na supernova.

8.1.3 Demais processos

Além dos dois processos descritos em detalhe aqui, outras interações longe de triviais ocorrem mediadas por correntes neutras e correntes carregadas. A física da descrição dessas interações é majoritariamente computacional, uma vez que a complexidade da estrutura interna dos agentes participantes dificulta a elaboração analítica das perdas de energia Q e as amplitudes de espalhamento \mathcal{M} . Ao fim do colapso, neutrinos de todas as espécies são produzidos, levando consigo 99% da energia total emitida pela supernova.

Durante todo o evento de supernova, a produção de neutrinos pode ser dividida em 4 momentos: *infall*, *neutronization*, *accretion* e *cooling*. A fase de *infall* corresponde aos momentos anteriores à criação da onda de choque, enquanto as camadas externas da estrela estão comprimindo o núcleo. Durante este processo a emissão de neutrinos aumenta gradualmente durante cerca de 10^{-2} segundos, enquanto a pressão maior no núcleo promove uma maior seção de choque para interações de neutrinos. Logo em seguida, o período de *neutronization* anuncia a criação da onda de choque com um pico rápido de intenso na emissão de neutrinos durante um tempo de 50 ms. Durante esta fase, a pressão sobre o núcleo se tornou grande o suficiente para vencer a repulsão elétrica entre elétrons e prótons, promovendo processos de captura de elétrons pelos prótons, $e^- + p \rightarrow \nu_e + n$. Seguindo o pulso intenso de neutrinos, o processo de *accretion* dura por consideravelmente mais tempo (200 ms) enquanto a matéria se acumula na onda de choque resultante que viaja do núcleo estelar até a superfície. Por fim, o período de *cooling* ocorre resfriando a estrela de nêutrons remanescente³ por até cerca de 9 segundos. Os detalhes específicos referentes à produção de neutrinos em cada uma dessas etapas varia de modelo para modelo, mas estas características gerais se mantêm fixas⁴.

8.2 Curvas de emissão

Modelos computacionais que simulam a emissão de neutrinos em supernovas, desde o início do colapso até o resfriamento da estrela de nêutrons recém formada, foram propostos a alguns anos. Em 1980, um dos primeiros modelos numéricos observou um espectro de emissão de neutrinos similar a um espectro de corpo negro, modificado por um termo de deficit energético devido a opacidade parcial de neutrinos no ambiente extremo do núcleo estelar (NADEZHIN; OTROSHCHENKO, 1980). Em seu trabalho, Otroshchenko propôs uma curva analítica para descrever a emissão

³ Em alguns casos a massa estelar é grande o suficiente para que o remanescente seja um buraco negro, ao invés de uma estrela de nêutrons.

⁴ Novamente, para o leitor curioso por divulgação científica e explicações mais ilustrativas e visuais, é recomendado o vídeo, também do canal Kurzgesagt, [Neutro Stars-The Most Extreme Things that are not Black Holes](#)

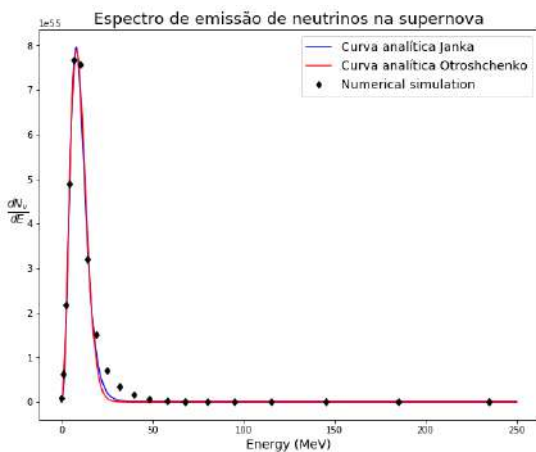
$$\frac{dN_\nu}{dE} = A \frac{E^2 e^{-\alpha \left(\frac{E}{kT}\right)^2}}{1 + e^{\frac{E}{kT}}}, \quad (8.31)$$

onde A é uma constante de normalização associada à energia total emitida, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura de emissão de neutrinos, o termo de exponencial negativa descreve o a opacidade parcial de neutrinos, onde α é o parâmetro de opacidade. Mais tarde, em 1989, novos modelos computacionais foram elaborados utilizando métodos de Monte Carlo⁵ e ainda obtiveram espectros com um leve desvio ao espectro perfeitamente térmico, isto é, um espectro de corpo negro. A parametrização destas simulações mais elaboradas sugeriu a modificação na equação do espectro de neutrinos emitidos da seguinte forma

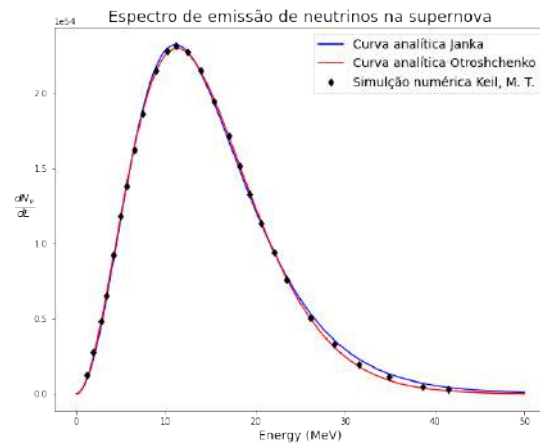
$$\frac{dN_\nu}{dE} = A \frac{E^2}{1 + e^{\frac{E}{kT} - \eta}}, \quad (8.32)$$

onde o termo η é uma pseudo-degenerescência, advinda do deficit de energia no espectro, e infelizmente não possui significado físico exato, tendo sido proposta apenas para adequar as curvas numéricas a uma função analítica (JANKA; HILLEBRANDT, 1989).

Para investigar as diferenças entre os dois modelos, utilizamos dados referentes a emissões de neutrinos por supernovas calculados mais recentemente utilizando simulações numéricas (NAKAZATO et al., 2013; KEIL; RAFFELT; JANKA, 2003)⁶. Ambas as funções, denominadas pelo nome dos autores (Otroschenko e Janka), são ajustadas utilizando minimização por mínimos quadrados não-linear (Figura 22a) (Código disponível em Anexo A e no link Github PedroHPCintra).



(a) Comparação de ambos os ajustes nos dados numéricos obtidos por (NAKAZATO et al., 2013).



(b) Comparação de ambos os ajustes nos dados numéricos obtidos por (KEIL; RAFFELT; JANKA, 2003).

⁵ O leitor que talvez possa nunca ter ouvido falar em métodos de Monte Carlo e deseje ter uma introdução ao tema, pode buscar ler (LANDAU; BINDER, 2014).

⁶ Os dados referentes às simulações realizadas no artigo estão publicamente disponíveis no [Web site of Supernova Neutrino Database](#)

Qualitativamente, a função Janka possui uma cauda menos acentuada na figura 22a, trazendo um leve favorecimento com relação à função Otroshchenko frente aos dados simulados, quantitativamente, o ajuste promovido pela função Janka retorna um valor de R^2 levemente maior⁷, evidenciando numericamente seu leve favorecimento. Já na figura 22b, ambas as curvas dão ajustes bons e com valores de R^2 idênticos até a 3^o casa decimal.

Outra comparação útil é verificar o efeito que os parâmetros de temperatura e "perda" tem sobre a energia média $\langle E \rangle$ de emissão dos neutrinos, onde a energia média é definida como

$$\langle E \rangle = \frac{\int E \frac{dN}{dE} dE}{\int \frac{dN}{dE} dE}. \quad (8.33)$$

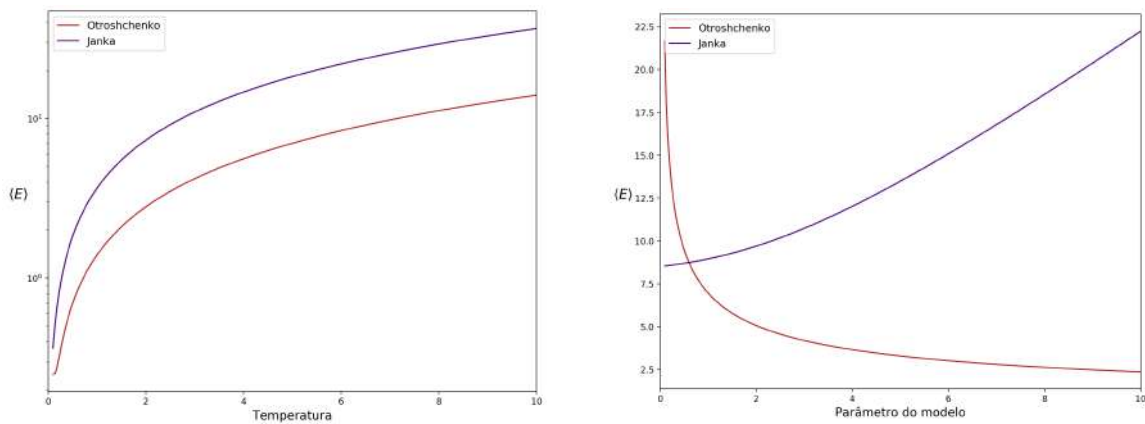


Figura 23 – Alteração da energia média de emissão em termos dos parâmetros da função. Na esquerda, esta relação está evidenciada em termos da temperatura. Na direita, a relação está em termos de α para Otroshchenko e η para Janka. Em ambos os gráficos, o outro parâmetro fixo foi aquele encontrado pelo ajuste com os dados computacionais.

No geral, ambas as funções descrevem razoavelmente bem o espectro de neutrinos emitidos por supernovas frente a simulações numéricas. Entretanto, neste trabalho, nos capítulos a seguir, devotados à descrição do experimento DUNE e da simulação de detecção, utilizaremos a função Janka por ser mais recente e apresentar um ajuste levemente melhor, comparada à função de Otroshchenko.

Aqui, tem-se fim a descrição do processo de supernovas e geração de neutrinos. A seguir, utilizamos o conhecimento adquirido com o desenvolvimento da teoria de partículas e seus sucessos experimentais, juntamente com o que se é sabido à respeito da emissão de neutrinos por supernovas para elaborar uma simulação numérica de um evento de detecção de neutrinos de supernova no detector DUNE.

⁷ Chamado de coeficiente de determinação, o R^2 nos diz o quanto da variância de uma dada variável x é explicado por ajuste. Caso 100% da variância seja explicado pelo ajuste, R^2 será 1. Portanto, valores mais altos de R^2 indicam ajustes mais adequados.

Parte III

Detecção

9 O Experimento

Seguimos agora para a descrição inicial do experimento de detecção a ser estudado neste trabalho. Como mencionado na introdução o DUNE, atualmente em construção, será um observatório de alta tecnologia e sensibilidade para experimentos de oscilação de neutrinos, decaimentos de prótons e detecção de neutrinos de supernovas (KEMP; COLLABORATION, 2017), sendo que, nosso foco estará voltado aos aspectos envolvendo a detecção de neutrinos de supernovas.

9.1 Descrição Técnica

O experimento internacional DUNE será localizado em um detector a aproximadamente 1,5 km de profundidade, para proteção contra interferência de raios cósmicos, no *Sanford Underground Research Facility* (SURF), Dakota do Sul, EUA, a uma distância de 1300 km do Fermilab. O detector será composto por quatro grandes câmaras de projeção de argônio líquido (LArTPC), totalizando 40 ktons de argônio líquido (ABI et al., 2018). Dois detectores permitirão em conjunto a medição e caracterização do feixe de neutrinos produzidos no Fermilab (Figura 24)¹.

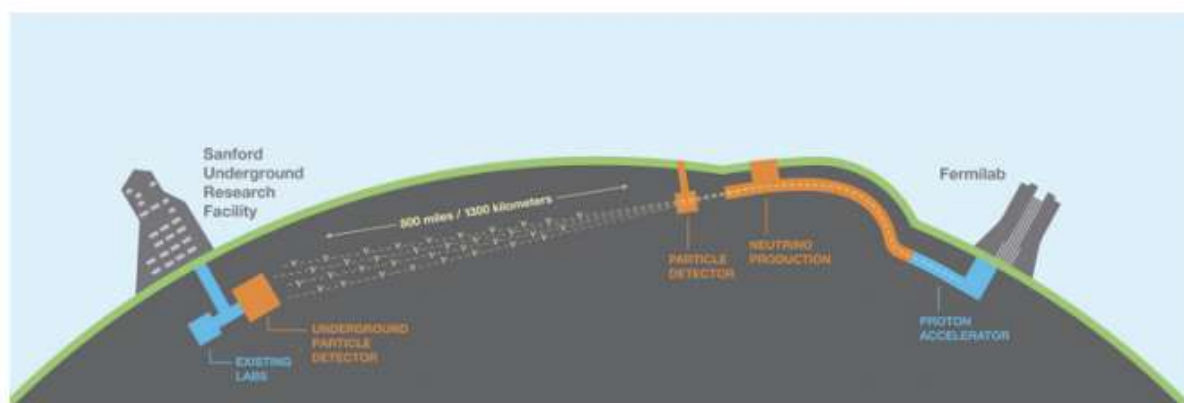


Figura 24 – Esquema do experimento e as instalações responsáveis pela produção e detecção do feixe de neutrinos (ABI et al., 2018).

O argônio líquido possui uma densidade elevada (1.39 g/cm^3), aumentando a seção de choque para a ocorrência de interações no detector. Além disso, o argônio é um gás nobre, o que garante que os elétrons gerados por radiação ionizante não serão capturados pelo líquido

¹ O Fermilab possui um canal no youtube com vídeos e animações a respeito de seus experimentos, incluindo o DUNE. O leitor que estiver interessado em saber sobre os demais objetivos do DUNE pode assistir [The Science of the Deep Underground Neutrino Experiment \(DUNE\)](#) e também o excelente vídeo [How to Capture Ghost Particles ft. Don Lincoln](#) feito pelo astrofísico Matt O'Dowd, apresentador do canal PBS Spacetime

e são desviados pelo campo elétrico dentro do detector até atingir um dos ânodos, criando um sinal elétrico (ACCIARRI et al., 2015). A câmara é construída com uma sequência de cátodos e um ânodos em paredes opostas, gerando um campo elétrico que levará os elétrons ionizados até o ânodo (Figura 25) onde, através da diferença de tempo entre a chegada dos elétrons provenientes da ionização gerada pelas partículas resultantes das interações de neutrinos ao ânodo, é obtida uma reconstrução do evento. Além disso, o argônio possui a propriedade de cintilar sobre a passagem de radiação ionizante, assim, detectores de fótons preenchem a câmara para obtenção dos fótons de cintilação do argônio com comprimento de onda característicos de 127 nm (COLLABORATION et al., 2018).

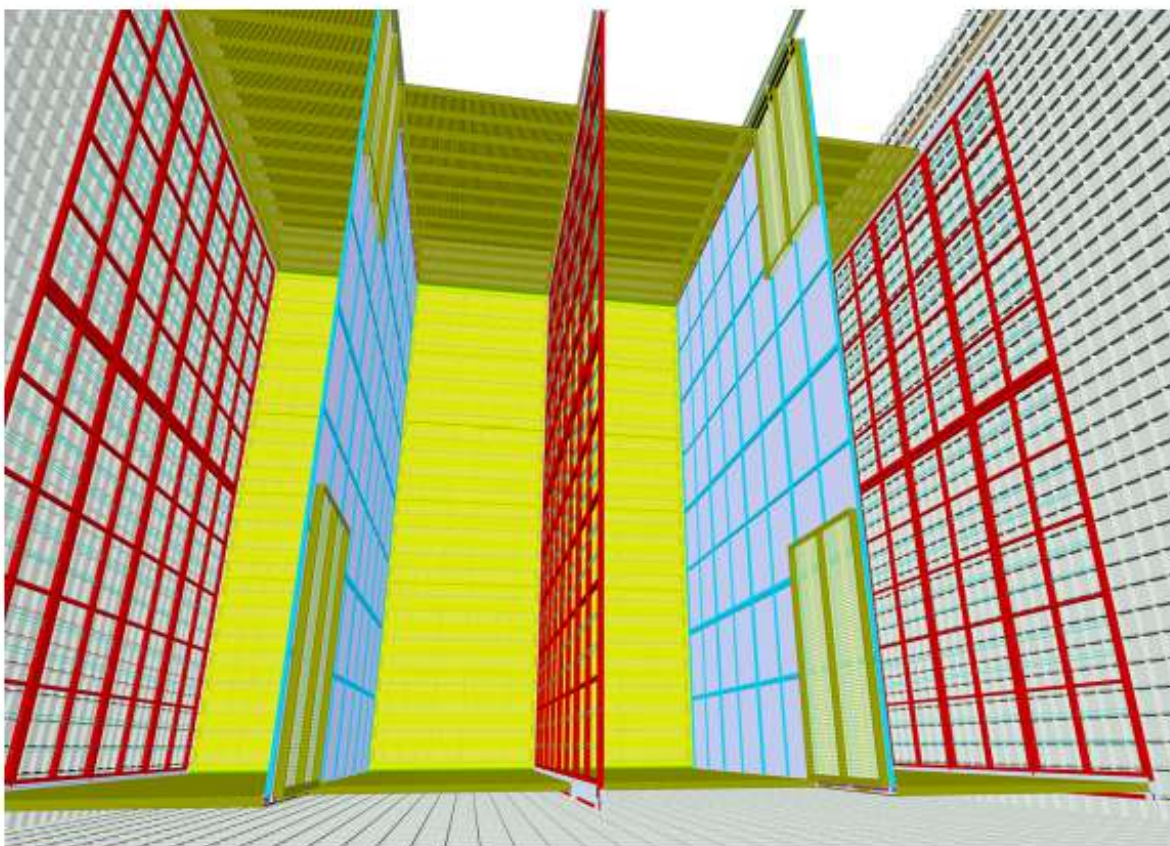


Figura 25 – Representação da disposição de placas de ânodos (azul) e cátodos (vermelho) dentro do LArTPC, os detectores de fótons são dispostos entre as placas, imersos no líquido para o desing single-phase (ABI et al., 2018).

O detector será exposto ao feixe de neutrinos mais intenso já criado, originado do Fermilab, viajando os 1300 km de distância dentro do interior da Terra até atingir o observatório DUNE. Um detector primário de alta precisão a 575 m da fonte de neutrinos irá caracterizar o espectro e intensidade do feixe.

O projeto inteiro é coordenado pelo *Long Baseline Neutrino Facility* (LBNF).

9.2 Objetivos

Usufruindo do feixe de neutrinos mais intenso já produzido e os gigantescos detectores de argônio líquido, o projeto DUNE tem como objetivo responder perguntas fundamentais na física de partículas, dos quais se pode destacar:

- A compreensão mais detalhada do fenômeno de oscilação de neutrinos, através dos feixes de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$, a partir da medição de δ_{CP} e dos ângulos de mistura entre os sabores de neutrinos, parâmetros que serão apresentados de forma teórica na tese final, afim de esclarecer aspectos relacionados à violação da simetria CP nas interações eletrofracas.
- A busca pelo decaimento de prótons, previsto pela *Grand Unified Theory*, teoria na qual busca a unificação das forças eletromagnética, fraca e forte.
- A detecção e medição do fluxo de ν_e provenientes de supernovas dentro da Via Láctea, afim de se estabelecer um melhor entendimento a cerca do processo de colapso estelar e formação de buracos negros.

Além de outros objetivos secundários como a busca por novos tipos de neutrinos, violações CPT e interações com matéria escura.

Dentro deste trabalho, nos focaremos no terceiro dos objetivos mencionado, utilizando simulações de experimentos para se verificar aspectos relacionados ao colapso estelar, tais como distância e geração de neutrinos, além de possíveis informações sobre o interior da estrela. As seções de choque $\sigma(E)$ da interação de são obtidas de acordo com a literatura (Figura 26) e o espectro de energias do feixe de neutrinos provenientes de uma supernova.

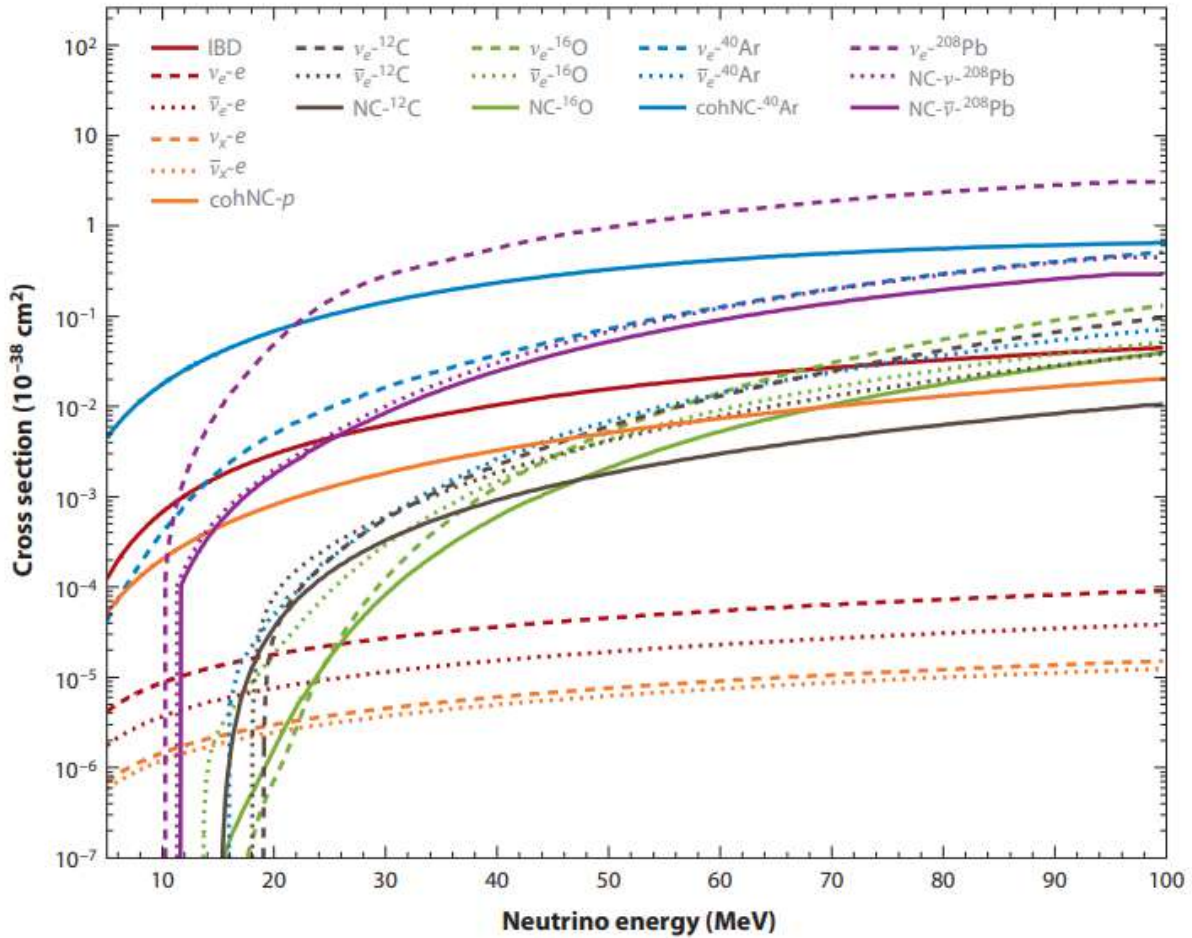


Figura 26 – Seção de choque em função da energia do neutrino para as interações mais relevantes na detecção de neutrinos de supernova. Retirada de (SCHOLBERG, 2012).

9.3 Canais de interação

O argônio líquido tem uma sensibilidade particular para a interação com o neutrino elétron, ν_e , proveniente das supernovas, através de interações de corrente-carregada (CC).



Onde, * indica que o núcleo se encontra excitado. Nesta interação, é observado o elétron emitido e^- e a energia liberada na desexcitação do argônio. Além deste processo, anti-neutrinos $\bar{\nu}_e$ podem interagir com os elétrons via espalhamento elástico, e interações do tipo corrente neutra (NC), envolvendo qualquer tipo de neutrino podem ocorrer,



nas quais o neutrino não produz um lépton l associado e apenas excita o núcleo de argônio. O número de interações do tipo (CC) e (NC) pode ser calculado e com base no espectro de energias dos neutrinos, na secção de choque das interações e na sensibilidade do detector.

O argônio líquido possui em seu interior alguns isótopos radioativos de argônio-39 em porcentagens baixas, que decaem via decaimento beta, emitindo partículas carregadas e criando um ruído de fundo na faixa de 0.57 MeVs de energia. Portanto, o DUNE possui um limiar mínimo nesse limite energético (STOENNER; SCHAEFFER; KATCOFF, 1965; BENETTI et al., 2007).

Após a interação, fótons de desexcitação acompanham a emissão de um elétron livre que ioniza demais elétron em uma cascata eletromagnética que é desviada pelo campo elétrico da câmara. Essa cascata incide na parede de ânodos, resultando em um sinal de trajetória. No caso das interações envolvendo o espalhamento elástico elétron-neutrino ou a interação NC entre neutrinos l e o núcleo, apenas o elétron livre ou o fóton de desexcitação são emitidos. O evento com a maior seção de choque é justamente a interação CC entre neutrinos elétron e o núcleo de argônio, portanto a maior parte dos eventos de detecção deve permitir reconstrução espacial direcional do evento através da diferença de tempo na chegada das partículas ionizadas no ânodo. Caso os elétrons emitidos possuam uma energia maior que 45 MeV, ocorre a emissão de radiação *Bremsstrahlung*², neste caso estes raios gamma são detectados por espalhamento Compton dentro do detector. Todos estes eventos já foram experimentalmente observados outras LArTPC (ACCIARRI et al., 2019).

9.4 Outros detectores

Atualmente, o líder na detecção de neutrinos de supernova é o Super-Kamiokande (Super-K), localizado no Japão, com 32 ktons de água pura, ele é um detector de radiação Cherenkov em água e foi o principal detector do evento SN1897-A. Os neutrinos interagem majoritariamente via decaimento beta inverso³, tornando este detector particularmente sensível aos antineutrinos elétron $\bar{\nu}_e$ (ABE et al., 2016). O IceCube, localizado na Antártida, também é um detector de radiação Cherenkov, desta vez no gelo. Com impressionantes 3 km de profundidade no gelo antártico, o IceCube carrega o mérito da detecção de neutrino extra galático mais energética já registrada (1 PeV = 10^{15} eV) (ABBASI et al., 2011). Além desses, existem detectores de cintilação como o LVD, Borexino e KamLAND também majoritariamente sensíveis aos processos de decaimento beta inverso. Em geral, as interações envolvendo neutrinos muon ou tau são mais raras nos detectores por necessitarem de uma energia acima da energia

² Radiação *Bremsstrahlung* é a radiação que cargas elétricas emitem ao sofrerem aceleração. Geralmente, este tipo de radiação é associado ao processo de frenagem de cargas elétricas em velocidades altas, como na produção de feixes de raio-x para radiografias.

³ Apesar de não ser uma interação detalhada neste trabalho, é um canal de interação bem comum em detectores de neutrinos. O leitor que possa se interessar pelos detalhes teóricos dos cálculos pode procurar em (STRUMIA; VISSANI, 2003; VOGEL; BEACOM, 1999).

média de neutrinos típicos de supernova. Por conta disso, estas interações ocorrem via corrente neutra, que possui sessões de choque menores.

O DUNE traz como novidade para a nova geração de detectores de neutrinos de supernova a sensibilidade para detecções envolvendo neutrinos ν_e . Essa nova sensibilidade permite a comparação de dados entre neutrinos e antineutrinos em níveis estatísticos altos para análise de dados através de detecções feitas em diferentes detectores. A tecnologia recente do DUNE com a câmara de projeção também traz a possibilidade de reconstrução direcional da supernova, algo que antes era exclusivo dos detectores via radiação Cherenkov.

10 Simulação

Uma vez que o DUNE ainda não se encontra pronto para aquisição de dados, trabalharemos com uma simulação simplificada da detecção a partir dos parâmetros necessários e adaptados para a situação do DUNE. Afim de atingir esse objetivo, este capítulo é dedicado para a explicação da simulação e a escolha de parâmetros a serem simulados. O próximo capítulo será dedicado à análise de resultados e limitações da simulação que podem vir a alterar o resultado final.

10.1 Determinação da supernova

Como vimos no capítulo 8 a curva de emissão de neutrinos pode ser descrita analiticamente, com uma boa concordância frente às simulações, pela função proposta por Janka em 1987.

$$\frac{dN_\nu}{dE} = A \frac{1}{1 + e^{\frac{E}{kT} - \eta}}, \quad (10.1)$$

onde A é uma constante de normalização que pode ser escrita em termos da energia total emitida E_{tot} , a temperatura de emissão T e a integral de fermi de ordem 3 $f^{(3)}$, que surge a partir da normalização da equação de emissão do espectro.

$$A = \frac{E_{tot}}{T^3 f^{(3)}}. \quad (10.2)$$

Afim de simular uma supernova, apenas se é necessário fixar T , η e E_{tot} . Portanto, o espectro de neutrinos emitido por uma supernova depende de 3 parâmetros, sendo que E_{tot} é razoavelmente constante, uma vez que está ligado à massa do núcleo estelar que resulta na estrela de nêutrons remanescente (ou buraco negro) e que por sua vez, está limitado pelo limite de Chandrasekhar. Por isso, consideramos E_{tot} uma constante no valor típico de 10^{53} ergs, nos deixando com apenas T e η como parâmetros livres para nossa escolha de supernova, e posteriormente para serem inferidos a partir do espectro de detecção.

A única supernova até o momento detectada através do fluxo de neutrinos ocorreu em 1987 (SN1987a). Neste evento, o detector de neutrinos Super-K, no Japão, detectou apenas 12 neutrinos provenientes do evento em um intervalo de 12 segundos, com uma energia média $\langle E_\nu \rangle = 15$ MeV (HIRATA et al., 1987). O detector Irvine-Michigan-Brookhaven foi capaz de captar outros 9 neutrinos provenientes da supernova, com uma energia média em torno de 32

MeV e o detector Mont Blanc detectou 5 neutrinos com uma energia média de 7.6 MeV (SCHAFFER; DECLAIS; JULLIAN, 1987). Este evento foi responsável por dar início a astronomia de neutrinos, e devido a sua importância, ele foi selecionado para ser o objeto da simulação de detecção do DUNE.

Com base nos resultados de ambos os detectores, a energia média dos neutrinos é de $\langle E_\nu \rangle = 18.2 \pm 10.2$ MeV. Para escolher o melhor par T e η para representar o espectro, observamos como a energia média de neutrinos emitidos pela supernova varia em termos dos dois parâmetros (Equação (8.33) e Figura 27).

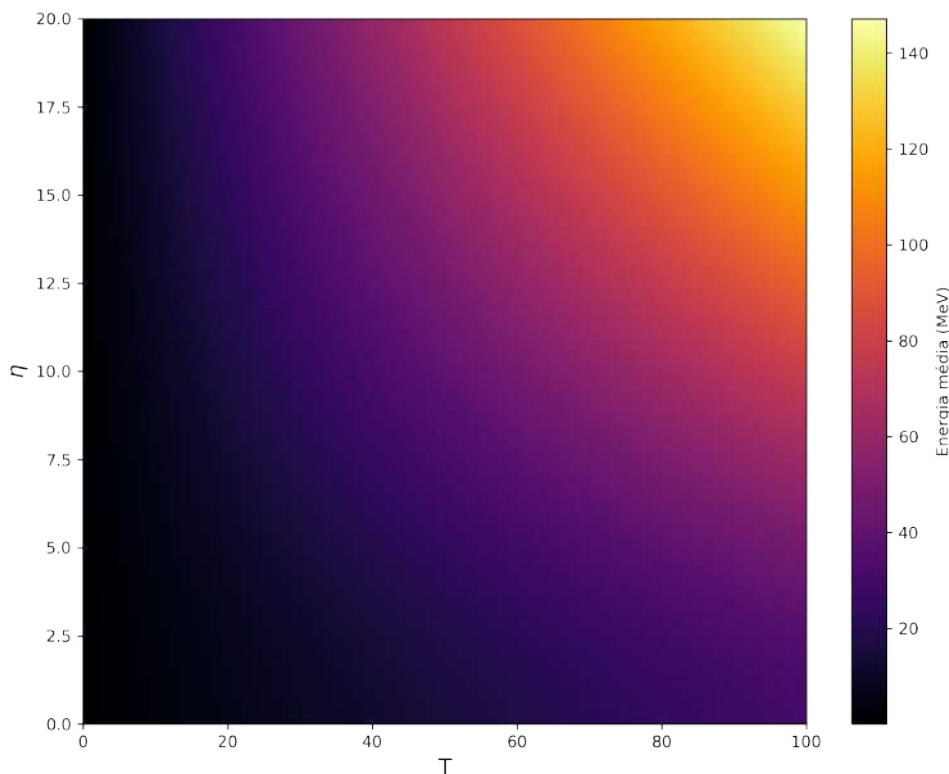


Figura 27 – Variação da energia média de emissão de neutrinos em termos de T e η .

A visualização da região de parâmetros possíveis é melhor observada nos limitarmos a região entre a média obtida pela detecção da SN1987a e os limites dados pelo desvio padrão $\Delta(E_\nu)$. Por fim, nos atemos ao fato que a temperatura de neutrinos no interior do núcleo de estrelas não costuma passar de 30 MeV, de acordo com simulações numéricas (BETHE; AP-LEGATE; BROWN, 1980). Escolhemos então o valor de energia de 20 MeV para representar a emissão da supernova (Figura 28).

O segundo parâmetro η é dificilmente determinado, e aqui escolhemos um valor que resulte uma quantidade de neutrinos detectada alta para fins de teste da capacidade do programa elaborado em encontrar os valores reais. Na sessão seguinte mencionaremos como a variação de T e η pode alterar a detecção.

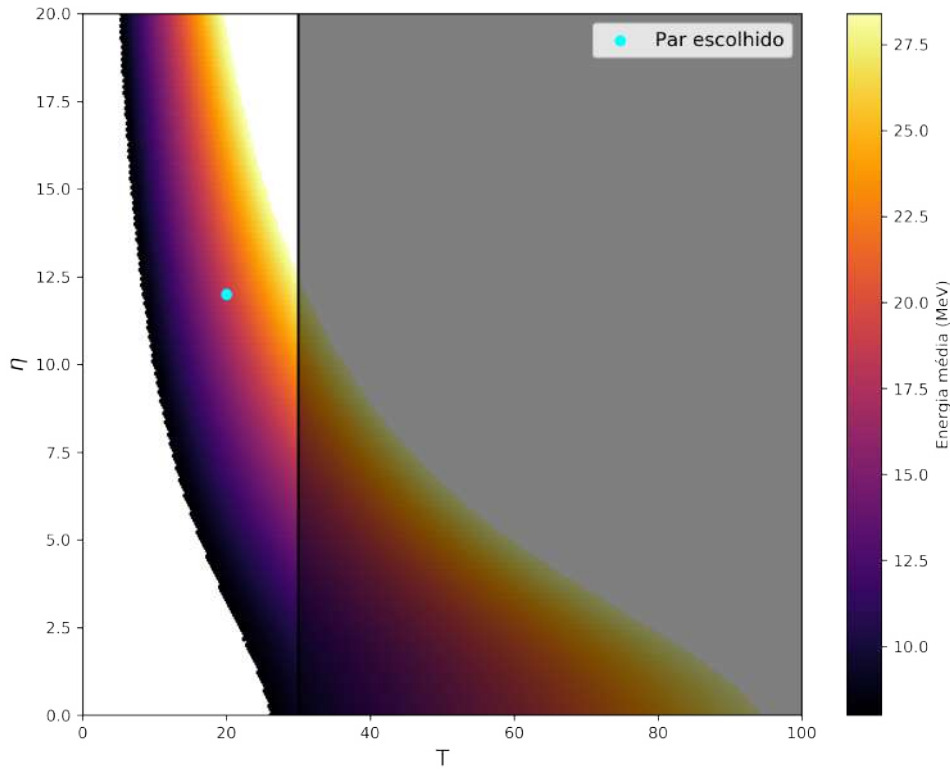


Figura 28 – Possíveis valores de T e η dada a variação de energia média na detecção da supernova 1987a. A região escurecida após $T = 30$ MeV representa a região de parâmetros não realísticos devido ao limite de 30 MeV observado para simulações numéricas. O par escolhido foi $T = 20$ MeV e $\eta = 12$. A região colorida contém os pares de T e η dentro do limite de 8 a 28.4 MeV.

10.2 Espectro esperado de detecção

O detector, após a determinação de eventos pelo rastro deixado na câmara de argônio líquido, é capaz de extrair um espectro de detecção. Novamente, no caso da SN1987a, o Super-K retirou um espectro de neutrinos detectado a partir dos eventos de emissão Cherenkov pelas partículas carregadas resultantes da interação dos neutrinos (Figura 29).

No DUNE, a energia do neutrino pode ser inferida a partir da energia da partícula resultante da interação, que por sua vez pode ser estimada pelo tempo de *drift* dentro do detector, ou seja, o tempo e a distância percorrida até que a partícula atinga o ânodo. O espectro de detecção é dado em termos da seção de choque da interação $\sigma(E)$, a eficiência do detector $\epsilon(E)$, a distância entre o detector (Terra), a supernova e o número total de partículas alvo no detector N_T e o espectro de neutrinos emitido da supernova

$$\frac{dN_{detec}}{dE} = \frac{N_T}{4\pi D^2} \frac{dN_\nu}{dE} \sigma(E) \epsilon(E). \quad (10.3)$$

O numero total de eventos ocorridos no detector deverá ser dado por

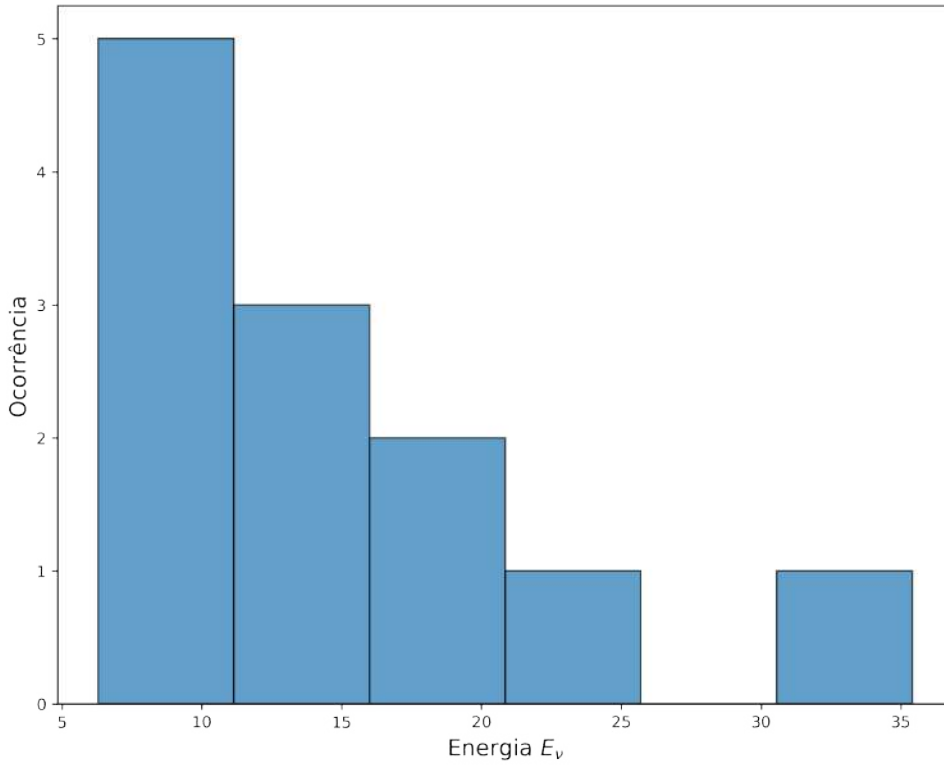


Figura 29 – Espectro de neutrinos detectado pelo detector Super Kamiokande em 1987.

$$N = \frac{N_T}{4\pi D^2} \int \frac{dN_\nu}{dE} \sigma(E) \epsilon(E) dE \quad (10.4)$$

Uma vez que σ é conhecido (Capítulo 6), nos resta conhecer a eficiência e a estimativa de partículas alvo no detector. A eficiência foi simulada pelo próprio time responsável pelo DUNE em 2020 (ABI et al., 2020), e pode ser razoavelmente descrita por uma função sigmoide

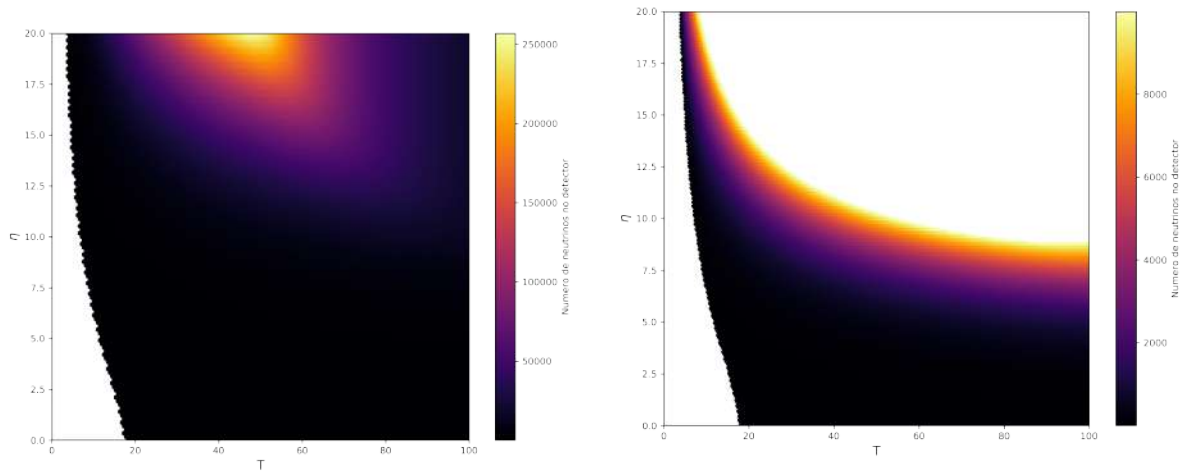
$$\epsilon(E) = \frac{1}{1 + e^{-b(E-c)}}, \quad (10.5)$$

onde $b = 0.976$ e $c = 1.265$ ¹. O numero de partículas alvo pode ser estimado, em ordem de grandeza, a partir da massa de argônio líquido do detector, 40 ktons e se comparando com a massa do átomo de argônio de 6.63×10^{-26} kg. Assim, estima-se da ordem de 10^{36} partículas alvo de argônio.

O último fator de importância para representar a detecção de uma supernova como a SN1987a, é a determinação da distância D , que foi fixada em 50 kpc (50 kiloparsecs $\approx 1.5 \times 10^{18}$ km) de acordo com as estimativas para a distância até a nuvem de Magalhães (BIONTA et al., 1991).

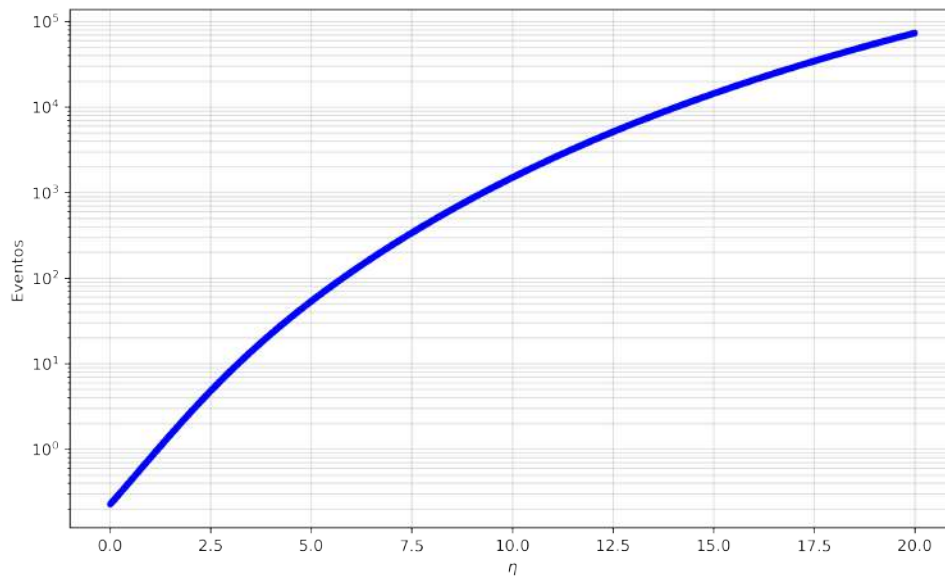
¹ Os valores foram obtidos extraíndo os dados do artigo base manualmente por meio de uma ferramenta online para verificação de valores em gráficos e utilizando um método usual de mínimos quadrados não linear para ajuste. O código, bem como os dados, estão disponíveis no GitHub [PedroHPCintra/TCC](#).

Uma análise importante para a simulação é verificar como o numero de eventos no detector varia conforme T e η mudam. Na figura 30, análises comparando a quantidade de eventos detectados em termos dos parâmetros estão feitas para o mesmo limite de variação considerado nas análises anteriores (Figura 30a), considerando um limite de 10000 neutrinos detectados no máximo (Figura 30b) e com a escolha de $T = 20$ MeV (Figura 30c).



(a) Number of events in terms of T and η .

(b) Number of events in terms of T and η with a maximum number of 10000 events.



(c) Number of events in terms of η for $T = 20$ MeV.

Figura 30 – Variação do numero total de neutrinos detectados, para uma distância fixa de 50 kpc. Nas figuras 30a e 30b as regiões em branco estão fora da região realística para as duas situações, na figura 30a, os valores que resultassem em um numero negativo de eventos (devido à aproximação polinomial da seção de choque do argônio) foram excluídos. Enquanto que, para a figura 30b, os valores de parâmetros que resultavam em uma quantidade de eventos acima de 10000 também foi excluída. Na parte inferior, 30c, computamos esta variação com T fixo em 20 MeV.

10.3 Flutuações estatísticas

Na sessão anterior discutimos como que o espectro detectado deve levar em consideração a seção de choque da interação, a eficiência do detector, a distância até a supernova e o número de partículas alvo para interação. Entretanto, estes parâmetros ainda geram um espectro de detecção irreal. Em primeiro lugar, devemos introduzir flutuações estatísticas no número total de neutrinos detectados. Em segundo lugar, inserir a flutuação associada à medida de energia destes neutrinos.

Considere um espectro de detecção cuja integral tem valor N , portanto, o número de neutrinos esperado no detector é N . Para atingir o primeiro objetivo, sorteamos de uma distribuição de Poisson com média em N um número aleatório N_p . A distribuição de Poisson serve aos propósitos deste problema pois é uma distribuição apenas de números inteiros, evitando assim que se possa vir a sortear, digamos 401.67, para representar nosso novo número de neutrinos detectados. Além disso, a distribuição de Poisson converge para o formato de uma gaussiana para valores centrais altos, representando a probabilidade simétrica de se detectar mais ou menos neutrinos. Entretanto, o principal motivo para o uso da distribuição de Poisson está na natureza do problema. A interação do neutrino no detector acontece ou não acontece, o que torna esse evento um evento de contagem, onde um dado número de eventos ocorre em um dado intervalo de tempo, e a probabilidade de um evento (uma interação) ocorrer, independe das demais, ou seja, este é um processo de Poisson. Após o sorteio de N_p , consideramos este como sendo o número de eventos de detecção e então, utilizamos a função de espectro esperado (10.4) como distribuição de probabilidade de se detectar um neutrino com uma energia entre E e $E + dE$. Assim, sorteamos $N_p \neq N$ neutrinos e possuímos um espectro de detecção mais realístico.

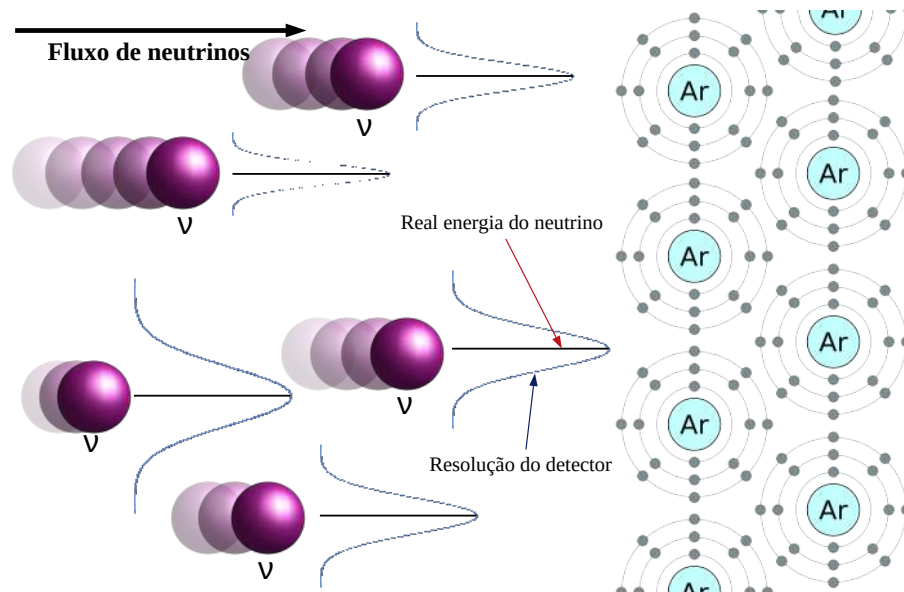


Figura 31 – Representação esquemática por trás da etapa 2 de flutuação estatística, cada neutrino incidente pode ser imaginado como possuindo, associado a si, uma distribuição gaussiana para sua energia. O centro da gaussiana é o valor real da energia do neutrino, que também é o valor mais provável de ser detectado, entretanto para cada energia, uma certa largura também está associada à resolução do detector, representando a possível variação na inferência da energia pelo DUNE.

Na segunda parte, para cada valor de energia E_i sorteado da distribuição, sortamos novamente um novo valor E'_i de uma distribuição gaussiana com centro em E_i e desvio padrão 5% de E_i (Figura 31). Dessa forma, simulamos a flutuação na energia associada à resolução de identificação energética do detector. Ao fim do processo 2, temos um espectro de detecção de acordo com o esperado no detector, dados os parâmetros da supernova, e com a introdução das devidas flutuações estatísticas devidas tanto à aleatoriedade da interação quanto à resolução do detector.

10.4 Ajuste bayesiano

Tendo em mãos o espectro de detecção realístico, dado por um histograma de energias de neutrinos. Podemos prosseguir para o momento de estimar os parâmetros T e η que melhor descrevem o espectro detectado. Nesta tarefa, primeiro normalizamos o histograma de detecção e a função a ser ajustada (10.4), dividindo a por N_p .

Para o ajuste, utilizamos o método *Approximate Bayesian Computation* (ABC) para realizar a inferência dos parâmetros. Mais especificamente, fazemos uso do ABC juntamente a um algoritmo de Monte Carlo sequencial (ABC-SMC) (TURNER; ZANDT, 2012). Supondo inicialmente um problema com apenas um parâmetro de ajuste, começamos com uma distribuição inicial para um dado parâmetro β , denominada *prior*, da qual sorteamos n parâmetros θ

e os consideramos possíveis candidatos para representarem o parâmetro real da curva. Em seguida, computamos a curva com este parâmetro e utilizamos alguma métrica de erro para medir o erro entre a curva teste e os dados, em nosso caso utilizamos a raiz quadrada média dos erros (RMSD) dada por

$$\text{RMSD} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n}}, \quad (10.6)$$

onde \hat{y} é o dado real e y é o ponto na curva.

Escolhemos ainda uma certa tolerância ϵ_1 que funcionará como um limiar de corte. Todos os valores θ_i sorteados que resultarem em um RMSD $\leq \epsilon$ são aceitos e guardados. Com isso temos uma nova distribuição de possíveis valores para o parâmetro β que tende a se aproximar mais da distribuição verdadeira. O processo é então repetido M vezes, onde a cada etapa, a tolerância diminui, isto é $\epsilon_{m+1} \leq \epsilon_m$, e a distribuição da qual os parâmetros são retirados é a distribuição posterior da última repetição. Ainda ao ser sorteado da distribuição posterior, os novos parâmetros sofrem uma perturbação pequena para introduzir uma pequena variabilidade na posterior (Figura 32).

Em nosso caso, escolhemos diminuir ϵ com base na média entre o maior e o menor valor de RMSD aceito, dessa forma garantimos que ϵ sempre diminuirá sem ultrapassar o limite mínimo possível para a distância entre a curva e os dados.²

² Atualmente, durante a pandemia da COVID-19, este método tem sido usado até mesmo para ajuste de modelos epidemiológicos a dados de infecções, afim de se promover previsões e análises epidemiológicas do surto. O leitor que estiver interessado em outras aplicações do método, pode olhar (MINTER; RETKUTE, 2019).

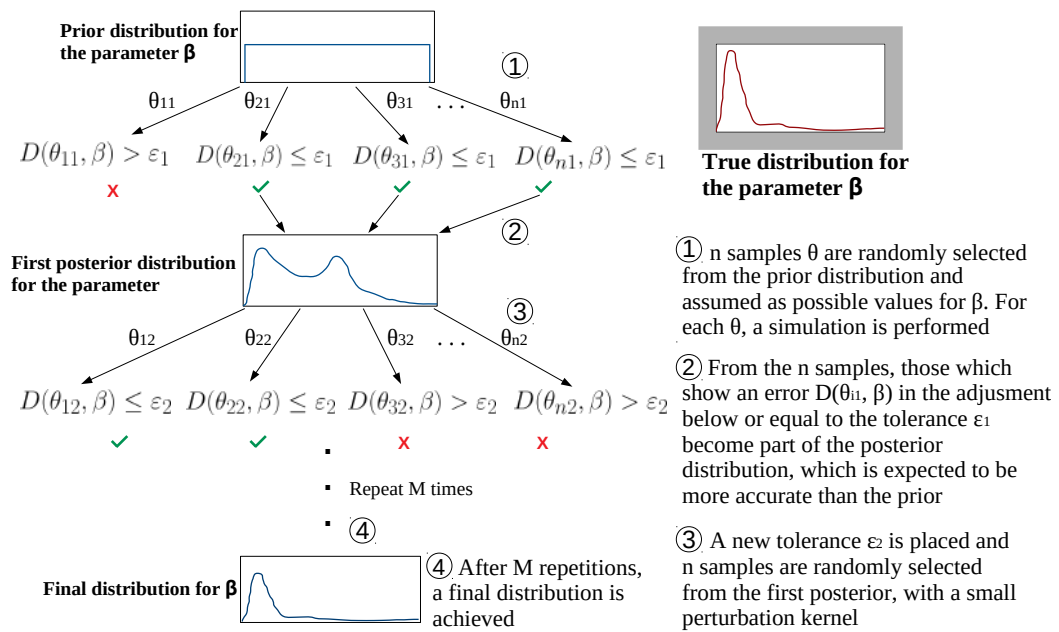


Figura 32 – Representação esquemática do algoritmo por trás do ABC-SMC. Na realidade, são sorteados valores específicos, e não distribuições finas como as mostradas nas caixas de θ_1 até θ_n , a escolha dessa representação foi puramente visando facilitar a visualização. Entretanto, esta representação pode se tornar válida a partir da segunda repetição, uma vez que os valores sorteados agora trazem consigo um leve ruído, que pode ser representado pela fina gaussiana.

Ainda visando validar o ajuste através de um teste de hipótese, o conjunto final de valores T e η encontrados pelo ajuste são varridos um a um. A cada par escolhido, um teste de Kolmogorov-Smirnov (Apêndice F) é feito entre a curva gerada pelos parâmetros e os dados, afim de testar se a hipótese nula, de que o conjunto de dados de fato veio da distribuição de referência, é rejeitada ou não.

10.5 Recuperando a distância

Tendo estimado o melhor par T e η que descreve os dados, e tendo a validade estatística do ajuste avaliada. Podemos repetir o algoritmo de ajuste ABC-SMC com três alterações para encontramos uma distribuição de possíveis distâncias que descrevem os dados. A primeira das alterações é retirar a normalização do histograma de detecção e da função de ajuste, para que o parâmetro D tenha papel. A segunda alteração é fixar T e η , de forma que o único parâmetro ajustável seja a distância D . E por último, alteramos a métrica de medição de erro. Ao invés de usarmos o RMSD, utilizamos simplesmente o módulo da diferença entre N_p e a integral N_D calculada com os valores de D candidatos.

$$\text{erro} = \left| N_p - \frac{N_T}{4\pi D^2} \int \frac{dN_\nu}{dE} \sigma(E) \varepsilon(E) dE \right|. \quad (10.7)$$

Sumarizando todo o processo, o código de simulação funcionará da seguinte forma:

1. Escolha dos parâmetros T e η e geração de um espectro de neutrinos emitido pela supernova;
2. Obtenção de um espectro de neutrinos esperado para o detector, dados os parâmetros do DUNE;
3. Introdução de flutuações estatísticas nos neutrinos detectados;
4. Ajuste Bayesiano para obtenção dos parâmetros originais a partir do espectro corrigido estatisticamente;
5. Uso dos parâmetros T e η obtidos para determinação da distância.

Dessa forma, conseguimos, a partir de um histograma de detecção adaptado para o DUNE, encontrar a temperatura de emissão de neutrinos T do evento, a degenerescência η da emissão e a distância D até a supernova. No capítulo seguinte, apresentamos e discutimos os resultados dessa simulação.

11 Análise dos Resultados

No capítulo anterior, exploramos toda a ideia de como a simulação de detecção funciona, para este trabalho. Neste capítulo, apresentamos os resultados dessa simulação. Todo o código fonte da simulação está disponível no anexo e virtualmente aberto em um repositório GitHub¹ no formato Jupyter Notebook, juntamente aos dados retirados de artigos mencionados, que foram usados para ajustar curvas e obter equações analíticas para esta simulação. Seguiremos a mesma ordem apresentada no capítulo anterior, na primeira seção apresentamos resultados relacionados à simulação da supernova e obtenção do espectro esperado para a detecção. Na segunda seção, destacamos os detalhes do espectro após as flutuações estatísticas. Na seção três, mostramos os resultados, após uso do ABC-SMC, para as estimativas de T e η . Na quarta seção, recuperamos o valor de distância até a supernova. E na última seção discutimos as limitações deste modelo de simulação, bem como aprimoramentos que podem ser feitos de maneira a produzir resultados mais realísticos.

11.1 Supernova e espectro de detecção

Para os parâmetros escolhidos no capítulo anterior, $T = 20$ MeV e $\eta = 12$, a supernova simulada emite um total de 2.73×10^{51} neutrinos, com uma energia média em torno de 18 MeV e um pico de emissão próximo a 20 MeV (Figura 33).

Levando em consideração as sessões de choque para o espalhamento neutrino-elétron, a curva analítica obtida dos dados de simulação feitos por MARLEY para a interação CC entre o neutrino e o argônio, a curva de eficiência, a distância de 50 kpc e 10^{36} partículas alvo, espera-se 4098 eventos de detecção relacionados à supernova, com uma energia média de 22.65 MeV (Figura 34). Esta diferença entre a energia média de emissão e detecção demonstra uma limitação com a escolha de representar a supernova em termos da energia média de detecção feita pelos detectores de neutrinos em 1987, porém, deixaremos esta discussão na última sessão deste capítulo.

¹ [PedroHPCintra/TCC](#)

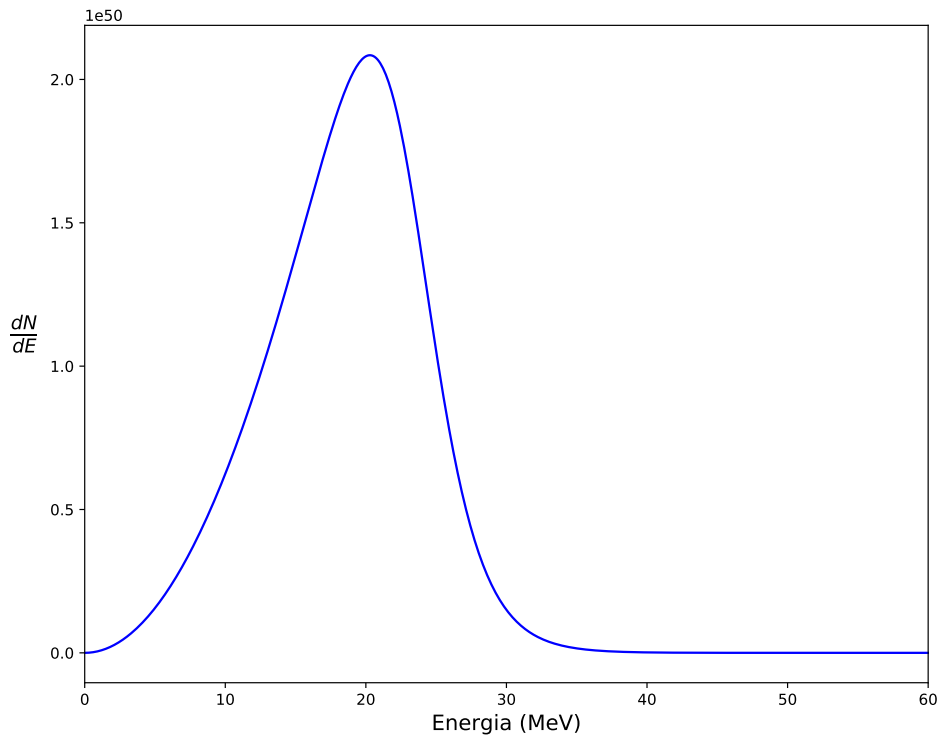
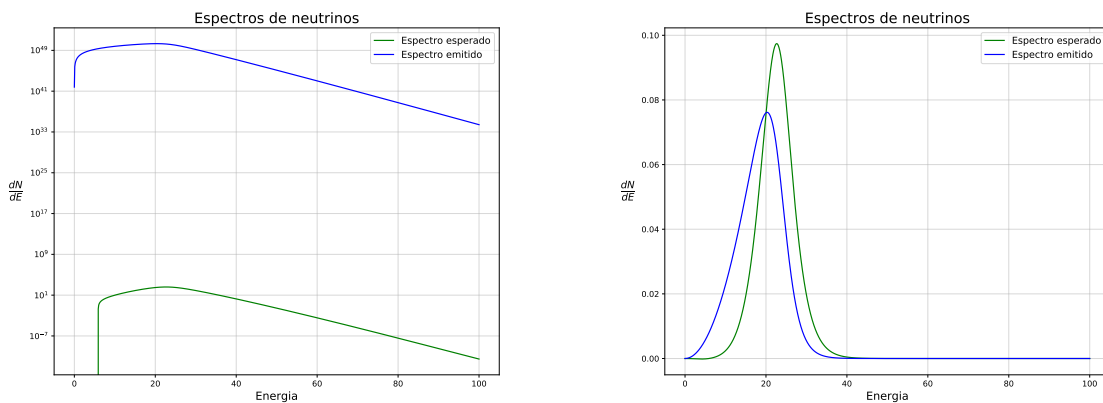


Figura 33 – Espectro de emissão de neutrinos simulado para a supernova em questão, $E_{tot} = 10^{53}$ ergs, $T = 20$ MeV, $\eta = 12$.



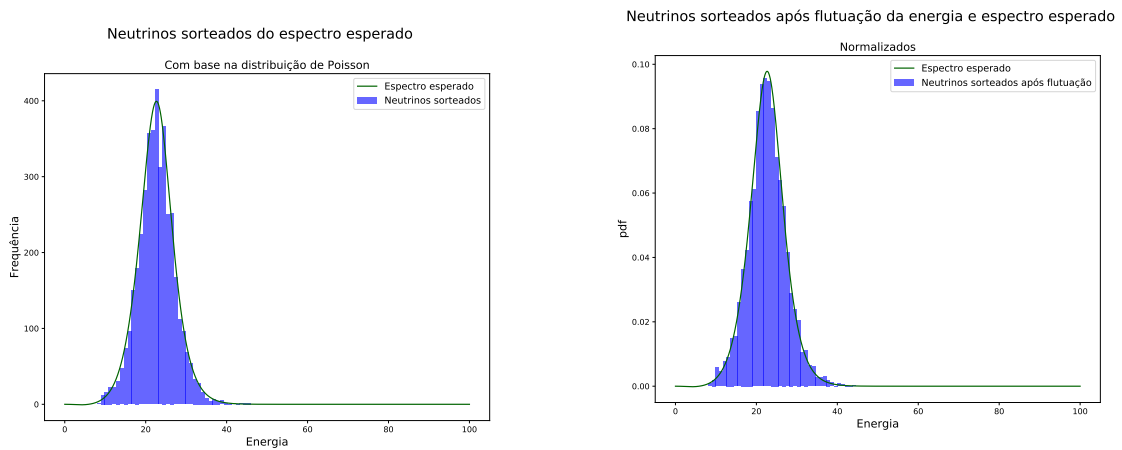
(a) Espectros em escala logarítmica.

(b) Espectros normalizados.

Figura 34 – Figura 34a, comparação, em escala logarítmica, do espectro de detecção e o espectro de emissão da supernova. Nota-se que o espectro de detecção possui uma queda mais abrupta para a região de poucos MeV devido à queda na eficiência de detecção. Figura 34b, comparação, do espectro de detecção e o espectro de emissão da supernova normalizados.

11.2 Espectro realístico

Dentro da distribuição de Poisson, com média em 4098, o numero sorteado para representar o valor total de neutrinos detectados N_p foi de 4082. Dentro de uma função de distribuição de probabilidade construída com base no espectro esperado para detecção, após o sorteio de N_p valores dentro dessa distribuição de probabilidade, obtivemos a figura 35a. Em seguida, como meconiado no capítulo anterior, cada valor sorteado foi novamente sorteado dentro de uma distribuição gaussiana, e por fim, obtivemos um espectro mais realístico de detecção, para ser usado nos ajustes (Figura 35b).



(a) Distribuição de eventos de detecção sorteados. (b) Eventos de detecção após o segundo sorteio, em torno dos valores sorteados no primeiro.

Figura 35 – Histograma de detecção após a primeira flutuação estatística dada pelo numero de eventos sorteados pela distribuição de Poisson (35a) e após a segunda flutuação estatística com o sorteio dentro da distribuição gaussiana (35b). Note que na figura 35b o espectro de detecção esperado e o histograma de detecção real já estão ambos normalizados.

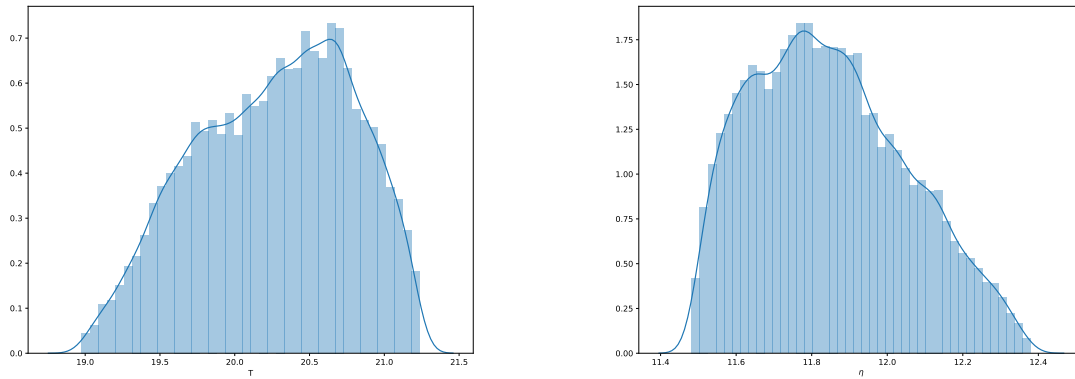
11.3 Estimativa de T e η

Tendo sido feita a normalização, o ABC-SMC foi aplicado sobre o espectro utilizando os seguintes parâmetros:

Parâmetro	Significado/Função	Valor
ϵ_1	Tolerância 1 ^o repetição	0.01
n	Numero de sorteios feitos	10^6
M	Numero de repetições	5
$\epsilon_i \ i > 1,$	Tolerância i-ésima repetição	$[\max(RMSD) - \min(RMSD)] / 2$
prior T	Distribuição a priori	Uniforme(0 a 40)
prior η	Distribuição a priori	Uniforme(0 a 20)

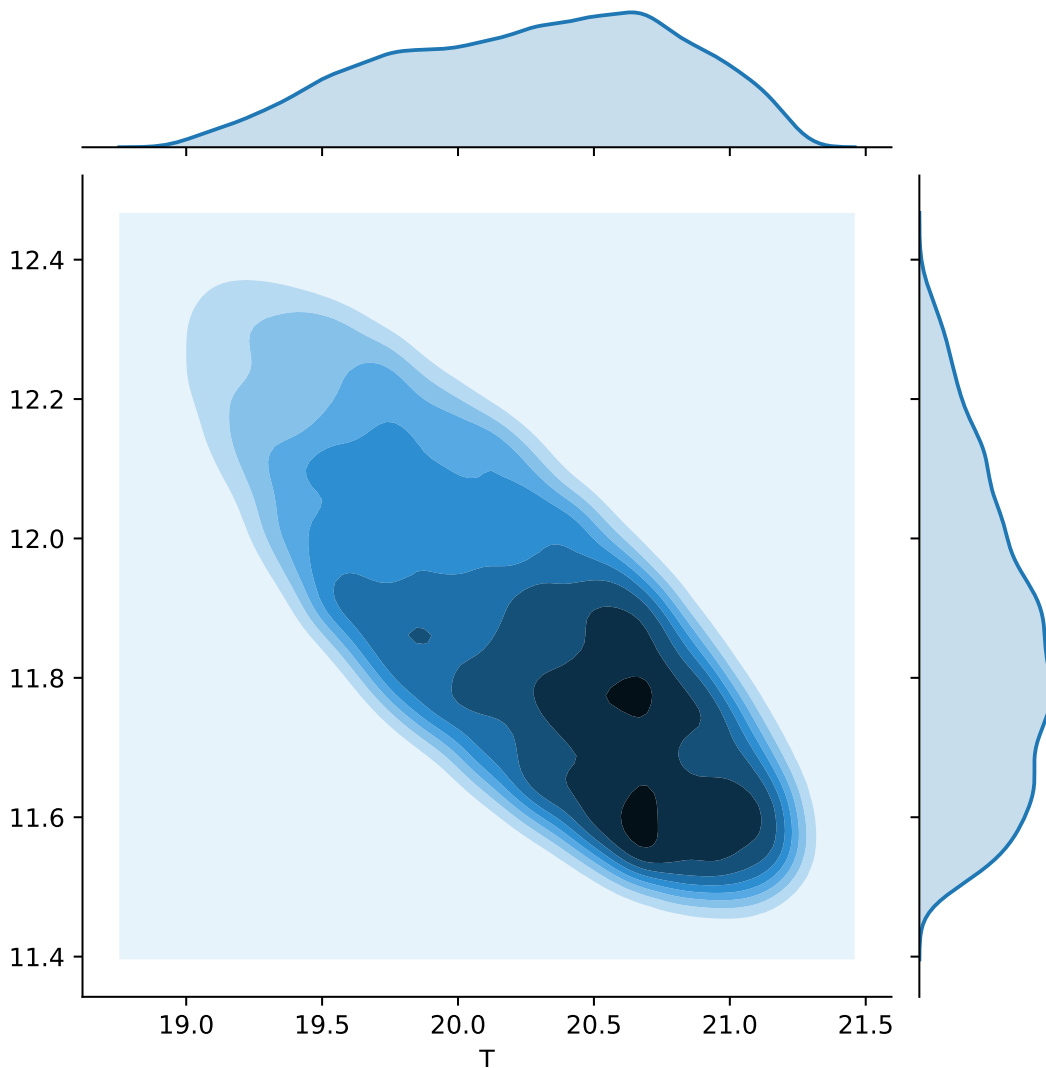
Tabela 4 – Parâmetros adotados para o ajuste dos dados de detecção com a curva de detecção esperada, utilizando o ABC-SMC.

As distribuições finais encontradas pelo ABC-SMC para cada um dos dois parâmetros é dada pela figura 36.



(a) Distribuição posterior para T

(b) Distribuição posterior para η



(c) Distribuição posterior de ambos

Figura 36 – Distribuições posteriores para ambos os parâmetros. Na figura 36c podemos observar o espaço de parâmetros que foi aceito dentro do ajuste ABC-SMC.

Para comparar como o RMSD variou dentro do espaço de parâmetros, um mapa de cores mostra o melhor valor de parâmetros encontrados, em comparação com os valores reais (Figura 37). O melhor valor foi escolhido como aquele que minimiza o RMSD, além disso a margem de 95% confiança foi estimada em cima da distribuição final da posteriori de cada parâmetro (Figura 36). Assim, os valores encontrados para T e η foram

$$T = 20.02 \quad (95\% \text{CDI} : 19.25 - 21.13) \quad (11.1)$$

$$\eta = 11.95 \quad (95\% \text{CDI} : 11.52 - 12.24), \quad (11.2)$$

$$(11.3)$$

que obtiveram o RMSD de 3.8×10^{-4} .

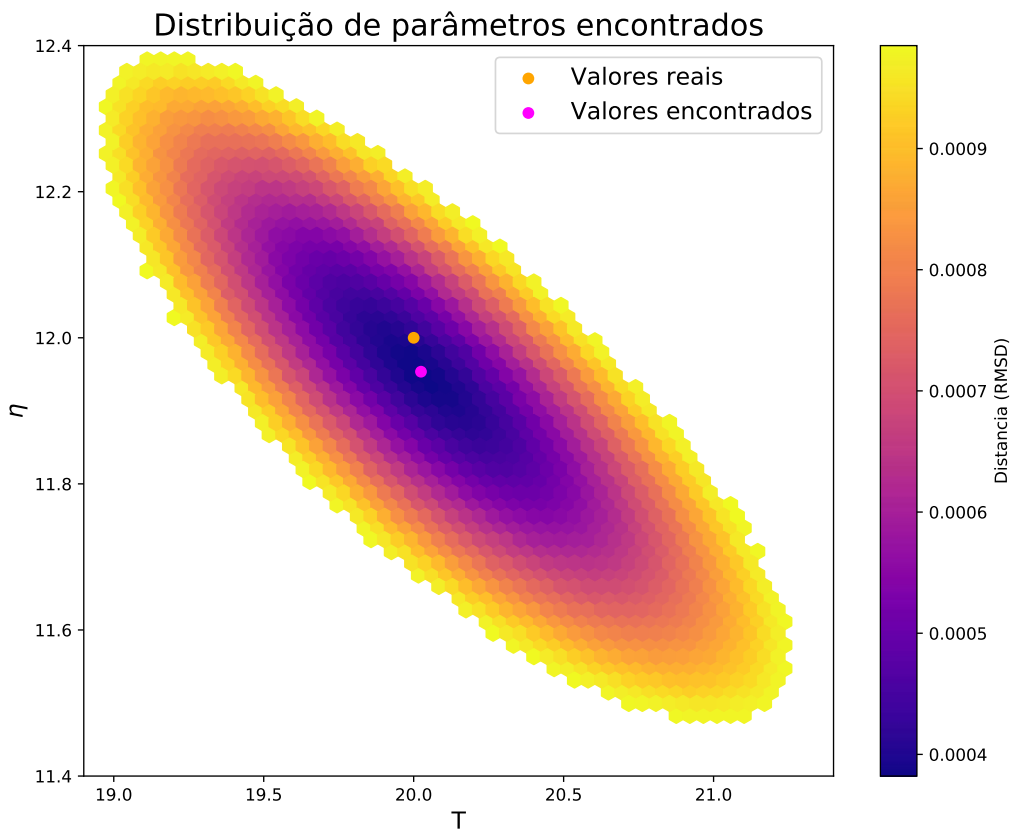
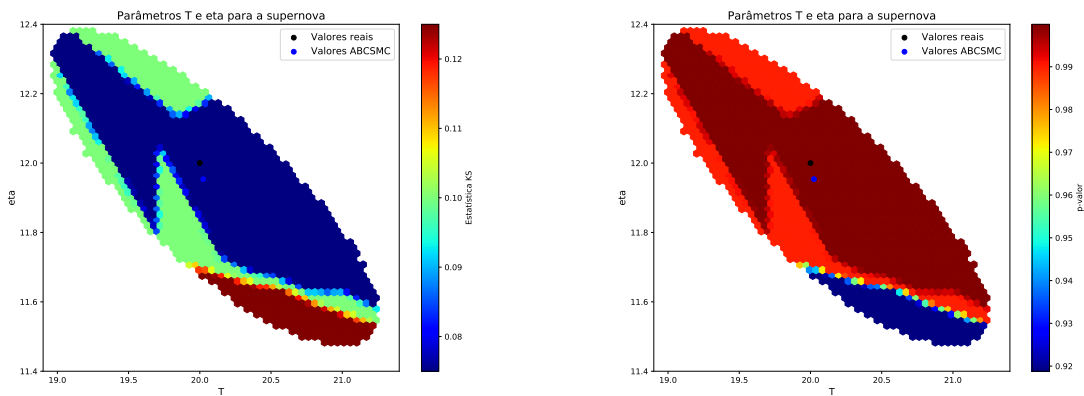


Figura 37 – Mapa de cores do erro RMSD em função dos parâmetros T e η . O melhor par, sendo aqueles que minimizaram a distância, foi dado por $T = 20.02$ e $\eta = 19.45$, sendo que o valor real (ponto laranja) se encontra próximo e dentro da margem de confiança dada pelas duas distribuições individualmente.

Ainda no intuito de validar T e η , o teste KS foi feito sobre todos os valores de T e η dentro das distribuições posteriores. Em toda a região de T e η a estatística KS não ultrapassou

0.12, sendo igual a 0.08 na maior parte da região. Além disso, o p-valor para todos os conjuntos de parâmetros dentro da distribuição foi maior que 0.92, sendo 0.99 na maior parte da região, incluindo os valores reais e o melhor par encontrado pelo ajuste. Este resultado nos impede de descartar a hipótese nula, de que o conjunto de dados veio da distribuição descrita por T e η . Juntando este dado ao achado dado pelo ajuste e pela estatística KS, é seguro afirmar que os valores de T e η , dentro da margem de confiança dada pelas distribuições, descreve corretamente o espectro de neutrinos observado no detector.



(a) Resultado da estatística KS dentro das distribuições de parâmetros encontrados. (b) Resultado de p-valor dentro da distribuição de parâmetros.

Figura 38 – Análise estatística da semelhança entre o histograma de detecção e a distribuição de probabilidade de detecção dada pela equação de detecção ajustada com os valores de T e η dentro dos valores aceitos pelo ajuste ABC-SMC.

11.4 Estimativa da distância

Na última tarefa da simulação, retiramos a normalização e refizemos o ABC-SMC, com as alterações mencionadas no capítulo anterior, para enfim obter qual foi a distância até a supernova. Para isso, os parâmetros escolhidos para o ABC-SMC foram:

Parâmetro	Significado/Função	Valor
ϵ_1	Tolerância 1 ^o repetição	500
n	Numero de sorteios feitos	10^6
M	Numero de repetições	5
ϵ_i $i > 1$,	Tolerância i-ésima repetição	$[\max(RMSD) - \min(RMSD)] / 2$
prior D	Distribuição a priori	Uniforme(40000 a 60000)

Tabela 5 – Parâmetros adotados para o ajuste da distância até a supernova, utilizando o ABC-SMC.

Após o programa ter feito todas as repetições o valor encontrado para a distância também foi escolhido como aquele que minimizou o RMSD, sendo este valor de

$$D = 49.6 \text{ kpc} \quad (95\% \text{ CDI} : 47 - 52.8). \quad (11.4)$$

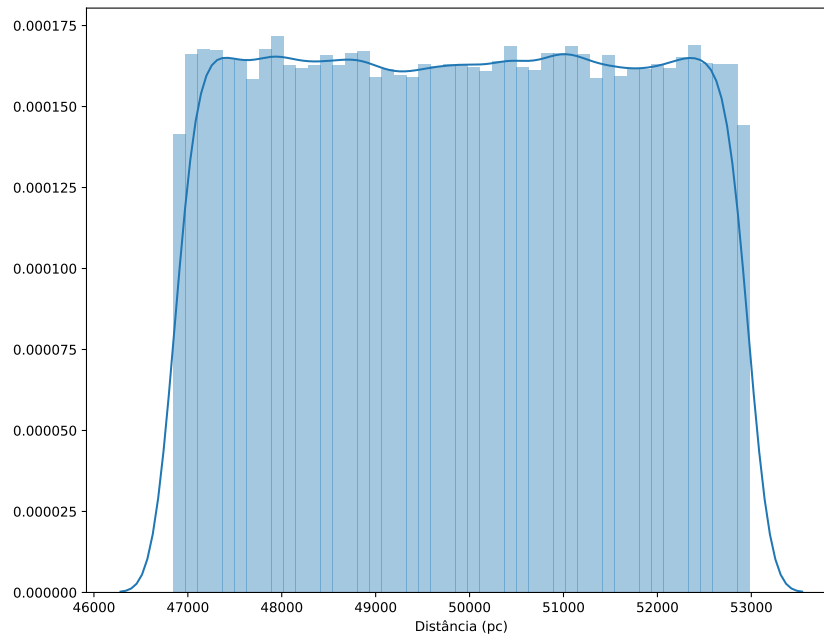


Figura 39 – Distribuição final de possíveis valores de D que ajustam o valor da integral do espectro detectado dentro da tolerância final de

11.5 Limitações e aprimoramentos

Feito toda a análise dos resultados, podemos voltar nossa atenção para as limitações do modelo computacional e como aprimorar os resultados em cima destas limitações.

A primeira delas, mencionada no início deste capítulo, está na discrepância entre a energia média de neutrinos detectada e a energia média de neutrinos emitidos. Esta discrepância, na verdade, não se torna uma limitação do método de ajuste, uma vez que após recuperados os valores de T e η , a energia média para a emissão pode ser estimada pela equação (8.33). A limitação está na verdade, em escolhermos representar a energia média da supernova, com base na energia média detectada nos detectores em 1987. De fato, devido a queda na seção de choque de interação e na eficiência do detector, o espectro de detecção tende a incluir valores mais altos de energia de neutrino, resultando em uma energia média de detecção maior do que a energia média de emissão. Isso pode ser visto pela figura 40, na figura, há um aumento considerável na discrepância entre as duas energias médias perto dos 5 MeV. Suponha um espectro de emissão com média em 6 MeV, boa parte da curva do espectro se encontrará na região anterior

aos 5 MeV. Assim, devido à queda de eficiência do detector, esta parte não será representada no espectro de detecção, aumentando consideravelmente a energia média de detecção.²

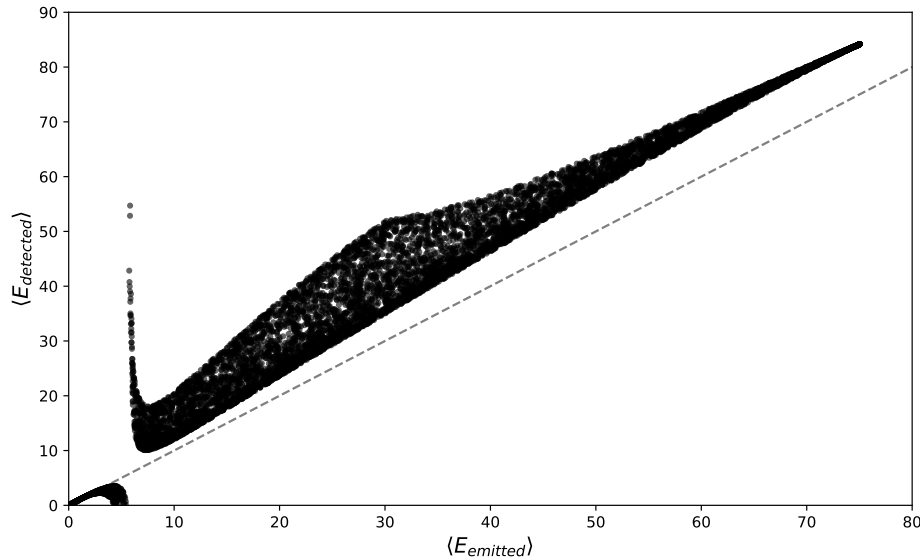


Figura 40 – Relação entre a energia média de neutrinos emitida pela supernova (eixo x) e a energia média detectada (eixo y) para diferentes valores de T e η .

A segunda limitação se encontra em E_{tot} , que foi assumido como constante. Entretanto, E_{tot} pode variar levemente, o que deve introduzir uma maior margem de erro nas estimativas feitas. Este problema pode ser contornado se considerarmos a distribuição de massa de estrelas nêutrons³ (remanescentes das supernovas) para estimarmos a distribuição de variação de E_{tot} . Assim, podemos varrer a distribuição, onde em cada varrida os valores de T e η são computados, terminando por fim com vários valores de parâmetros e suas respectivas margens de erro para cada valor E_{tot} dentro da distribuição. No fim, estes valores podem ajudar a construir uma distribuição final de possíveis valores de E_{tot} mais adequada à variação de energia total.

Outra limitação, está relacionada ao fenômeno de oscilação de neutrinos, que não foi considerado neste trabalho. Aqui, assumimos que as espécies de neutrinos são igualmente criadas e interagem em proporções iguais. De forma mais realística, a simulação pode ser feita com base nos espectros individuais para cada espécie de neutrino, alterando a seção de choque de interação e o espectro de emissão para adequá-lo à mistura de neutrinos. As energias médias de emissão de neutrinos, variam de 10/11 MeV para ν_e , 15/16 MeV para $\bar{\nu}_e$ e 23/25 MeV para ν_x , onde $x = \mu, \bar{\mu}, \tau, \bar{\tau}$ (ATHAR; SINGH, 2004; BUENO; GIL-BOTELLA; RUBBIA, 2003). Entre-

² Como um segundo exercício de visualização, o leitor pode pensar na energia média como estando localizada no centro de massa da área preenchida pela curva. Se a região anterior aos 5 MeV é "cortada fora", o centro de massa é deslocado para regiões de energia mais alta.

³ Vários estudos possuem medidas da distribuição de massas de estrelas de nêutrons em diferentes sistemas, como binários de estrelas de nêutrons e binários estrela de nêutron-anã branca (ANTONIADIS et al., 2016; KIZILTAN et al., 2013; ÖZEL et al., 2012)

tanto, como a proporção entre os neutrinos depende da distância percorrida, que é uma variável desconhecida, esta parte do problema se torna bem mais complexa de ser resolvida.

Podemos ainda, deixar a simulação mais abrangente, utilizando diferentes simulações e aproximações para a seção de choque neutrino-argônio. Diversos trabalhos já foram feitos no objetivo de se obter sessões de choque para esta interação (ATHAR; SINGH, 2004; BUENO; GIL-BOTELLA; RUBBIA, 2003). A partir da utilização destes trabalhos, podemos construir resultados mais adaptados para cada aproximação.

Uma outra limitação está no procedimento estatístico em si, neste código, simulamos um valor N_p para um dado N , e obtemos os valores desejados a partir dele. Entretanto, para se obter uma validação mais abrangente, o ideal seria repetir essa simulação para k valores N_p , segundo a distribuição de Poisson, afim de obter uma estimativa de erro e de generalização do algoritmo. Esta limitação pode ser resolvida com maior facilidade repetindo todo o algoritmo descrito no capítulo anterior k vezes. Nessa situação, as distribuições obtidas para os parâmetros não será o resultado de um ABC-SMC, mas sim de vários.

A última limitação mencionada aqui está no próprio poder computacional. Todo o programa foi feito em um computador pessoal de 8 GB de memória RAM, processador Core i5 8th gen. Devido a este fato, o ABC-SMC não pode ser utilizado com mais repetições, ou mais sorteios, ou com uma margem de variação nas distribuições uniformes maior, devido ao tempo de computação tomado para cada repetição feita pelo ABC-SMC.

Conclusão

Este trabalho, com sucesso, apresentou a elaboração teórica por trás da teoria eletrofraca, utilizada para descrever neutrinos. Além disso, apresentamos os cálculos para as interações envolvendo neutrinos, bem como os resultados experimentais que validam a teoria. Ainda passamos brevemente pela descrição teórica/fenomenológica das supernovas, incluindo o processo de geração de neutrinos nas mesmas. Por fim, descrevemos e simulamos como estas partículas, produzidas em supernovas, podem ser detectadas na Terra e podem servir como meio para extrair informação à respeito do evento astrofísico, como a distância e a temperatura de emissão de neutrinos.

Estes estudos experimentais carregados pelo DUNE, poderão no futuro impor restrições nos modelos de supernovas, além de investigar a validade de diversas outras hipóteses que permeiam a física de neutrinos. Neste quesito, as simulações aqui apresentadas se tornam úteis para preparar as possíveis melhorias a serem feitas no detector e o que se espera a partir dos experimentos. Além disso, é possível estimar a precisão dos resultados e avaliar para quais tipos de modelos este experimento pode ser útil. Pode-se imaginar que, com simulações deste tipo feitas para diferentes detectores, podemos estimar a atual sensibilidade da nova geração de detectores e ajudar a guiar o aprimoramento dos próximos detectores de neutrinos.

A abertura desta nova janela de observação, juntamente à observação no espectro eletromagnético e o sinal de ondas gravitacionais, permite a extração de informação e aquisição de dados em uma escala jamais feita pela humanidade. Neste trabalho, mostramos a solidez da teoria quântica de campos, teoria fundamental para a descrição das partículas fundamentais, até o momento. Esta teoria, elaborada no século XX, encontrou hoje sua aplicação na astrofísica e em diversas outras áreas da física, como a física de matéria condensada. Essa aplicação, nos permite obter modelos mais completos e trabalhar com problemas que envolvem as duas maiores áreas da física que não possuem regimes de validade que se interseccionam, a relatividade geral e a teoria quântica. Há anos, físicos tentam unificar estas duas teorias pela quantização da gravidade, e como parte da ciência, os modelos devem ser sujeitos a testes experimentais, que atualmente estão fora do alcance tecnológico e financeiro da maior parte das instituições. A união entre a física de partículas e a astrofísica representa a melhor oportunidade, atualmente, para se utilizar dados experimentais a fim de validar ou descartar modelos teóricos.

A fim de percorrer todo o método científico, este trabalho saiu da primeira hipótese sobre os neutrinos, elaborada em 1930 por Wolfgang Pauli, até a elaboração da teoria, com base em observações tidas na época, seguindo para a validação experimental de diversas previsões feitas pela teoria. Por fim, chegando na aplicação desta teoria em novas áreas, buscando novos resultados experimentais. E ainda, aproveitamos o uso dos métodos computacionais modernos

para promover simulações e fazer uso desta outra etapa para o desenvolvimento de teorias científicas.

Visando a disponibilidade para os estudantes de física no final da graduação, este trabalho incluiu o detalhamento, juntamente com apêndices, para facilitar o acesso ao conteúdo desta monografia pelos alunos que bem desejarem.

Finalmente, concluímos este trabalho ressaltando a importância e relevância de trabalhos de revisão extensa em tópicos de pesquisa. Estes trabalhos permitem a concentração do conhecimento acumulado por anos em uma única fonte, além de servirem como base de estudo para cientistas ao se introduzirem em um tema de pesquisa/estudo. Aqui, teve-se a intenção de promover este tipo de trabalho, visando o aluno de graduação em física como público alvo.

Referências

- ABBASI, R. et al. Icecube sensitivity for low-energy neutrinos from nearby supernovae. *Astronomy & astrophysics*, EDP Sciences, v. 535, p. A109, 2011. Citado na página 139.
- ABE, K. et al. Real-time supernova neutrino burst monitor at super-kamiokande. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 81, p. 39–48, 2016. Citado na página 139.
- ABI, B. et al. The dune far detector interim design report volume 1: Physics, technology and strategies. *arXiv preprint arXiv:1807.10334*, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 20, 135 e 136.
- ABI, B. et al. Supernova neutrino burst detection with the deep underground neutrino experiment. *arXiv preprint arXiv:2008.06647*, 2020. Citado na página 144.
- ACCIARRI, R. et al. Summary of the second workshop on liquid argon time projection chamber research and development in the united states. *Journal of instrumentation*, IOP Publishing, v. 10, n. 07, p. T07006, 2015. Citado na página 136.
- ACCIARRI, R. et al. Demonstration of mev-scale physics in liquid argon time projection chambers using argoneut. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 1, p. 012002, 2019. Citado na página 139.
- AKIMOV, D. et al. Observation of coherent elastic neutrino-nucleus scattering. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 357, n. 6356, p. 1123–1126, 2017. Citado na página 115.
- ANTONIADIS, J. et al. The millisecond pulsar mass distribution: Evidence for bimodality and constraints on the maximum neutron star mass. *arXiv preprint arXiv:1605.01665*, 2016. Citado na página 158.
- ATHAR, M. S.; SINGH, S. ve (ve)–40ar absorption cross sections for supernova neutrinos. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 591, n. 1-2, p. 69–75, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 158 e 159.
- BACKENSTOSS, G. et al. Helicity of μ^- mesons from π^- -meson decay. *Physical Review Letters*, APS, v. 6, n. 8, p. 415, 1961. Citado na página 60.
- BENETTI, P. et al. Measurement of the specific activity of ^{39}Ar in natural argon. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 574, n. 1, p. 83–88, 2007. Citado na página 139.
- BERESTETSKII, V.; LIFSHITZ, E.; PITAEVSKII, V. Relativistic quantum theory. pt. 1. *Course of theoretical physics-Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering & Social Studies*, Oxford: Pergamon Press, 1971, edited by Landau, Lev Davidovich (series); Lifshitz, EM (series), 1971. Citado na página 102.
- BERG, E. J. *Heaviside's Operational Calculus as applied to Engineering and Physics*. [S.l.]: McGraw-Hill book company, inc., 1936. Citado na página 70.

- BETHE, H.; APPLGATE, J.; BROWN, G. Neutrino emission from a supernova shock. *The Astrophysical Journal*, v. 241, p. 343–354, 1980. Citado na página [142](#).
- BIONTA, R. et al. Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987a in the large magellanic cloud. In: *Neutrinos And Other Matters: Selected Works of Frederick Reines*. [S.l.]: World Scientific, 1991. p. 340–342. Citado na página [144](#).
- BOYARSKY, A. et al. Sterile neutrino dark matter. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 104, p. 1–45, 2019. Citado na página [86](#).
- BROCKWAY, J. W.; CARLSON, E. D.; RAFFELT, G. G. Sn 1987a gamma-ray limits on the conversion of pseudoscalars. *arXiv preprint astro-ph/9605197*, 1996. Citado na página [122](#).
- BROWN, L. M. The idea of the neutrino. *Physics Today*, v. 31, n. 9, p. 23, 1978. Citado na página [31](#).
- BUENO, A.; GIL-BOTELLA, I.; RUBBIA, A. Supernova neutrino detection in a liquid argon tpc. *arXiv preprint hep-ph/0307222*, 2003. Citado 2 vezes nas páginas [158](#) e [159](#).
- BURROWS, A. Neutrinos from supernova explosions. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 40, n. 1, p. 181–212, 1990. Citado na página [122](#).
- CHENG, T.-P.; LI, L.-F.; CHENG, T.-P. Gauge theory of elementary particle physics. Clarendon press Oxford, 1984. Citado 3 vezes nas páginas [63](#), [82](#) e [86](#).
- CHIN, Y.-N.; HUANG, Y.-L. Identification of the guest star of ad 185 as a comet rather than a supernova. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 371, n. 6496, p. 398–399, 1994. Citado na página [119](#).
- COLLABORATION, A. et al. Precision electroweak measurements on the z resonance. *arXiv preprint hep-ex/0509008*, 2005. Citado na página [114](#).
- COLLABORATION, D. et al. The dune far detector interim design report, volume 2: Single-phase module. *arXiv*, Sheffield, 2018. Citado na página [136](#).
- COLLABORATION, S. et al. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by 8b solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *arXiv preprint nucl-ex/0106015*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas [31](#) e [78](#).
- COWAN, C. et al. Detection of the free neutrino: A confirmation. *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.*, v. 14, p. 38–42, 2000. Citado na página [31](#).
- DANBY, G. et al. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Physical Review Letters*, APS, v. 9, n. 1, p. 36, 1962. Citado na página [31](#).
- DEHGHANI, M. Gupta-bleuler quantization for massive and massless free vector fields. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 39, n. 3, p. 559–563, 2009. Citado na página [185](#).
- DICUS, D. A. Stellar energy-loss rates in a convergent theory of weak and electromagnetic interactions. *Physical Review D*, APS, v. 6, n. 4, p. 941, 1972. Citado na página [126](#).

- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. Citado na página 49.
- ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 9, p. 321, 1964. Citado na página 91.
- FERMI, E. Versuch einer theorie der β -strahlen. i. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 88, n. 3-4, p. 161–177, 1934. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 79.
- FOLLAND, G. B. *Fourier analysis and its applications*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 4. Citado na página 71.
- FUKUDA, S. et al. The super-kamiokande detector. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 501, n. 2-3, p. 418–462, 2003. Citado na página 104.
- FUKUDA, Y. et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 8, p. 1562, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 78.
- GARDINER, S. *Nuclear Effects in Neutrino Detection*. Tese (Doutorado) — University of California, Davis, 2018. Citado na página 115.
- GIUNTI, C.; KIM, C. W. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. [S.l.]: Oxford university press, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 52, 86, 101, 102, 103, 114 e 175.
- GOLDHABER, M.; GRODZINS, L.; SUNYAR, A. Helicity of neutrinos. *Physical Review*, APS, v. 109, n. 3, p. 1015, 1958. Citado na página 60.
- GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. *Quantum electrodynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 183.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to elementary particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 20, 63, 106, 110 e 114.
- GURALNIK, G. S.; HAGEN, C. R.; KIBBLE, T. W. Global conservation laws and massless particles. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 20, p. 585, 1964. Citado na página 91.
- HAENSEL, P. Urca processes in dense matter and neutron star cooling. *Space Science Reviews*, Springer, v. 74, n. 3-4, p. 427–436, 1995. Citado na página 123.
- HALL, B. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*. [S.l.]: Springer, 2015. v. 222. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- HASERT, F. et al. Search for elastic muon-neutrino electron scattering. *Physics letters B*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 121–124, 1973. Citado na página 80.
- HASSANI, S. *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 71.
- HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 16, p. 508, 1964. Citado na página 91.

- HIRATA, K. et al. Observation of a neutrino burst from the supernova sn1987a. *Physical Review Letters*, APS, v. 58, n. 14, p. 1490, 1987. Citado na página 141.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 185, 186 e 187.
- JANKA, H.-T.; HILLEBRANDT, W. Neutrino emission from type ii supernovae-an analysis of the spectra. *Astronomy and astrophysics*, v. 224, p. 49–56, 1989. Citado na página 130.
- JOHNS, L.; FULLER, G. M. Self-interacting sterile neutrino dark matter: the heavy-mediator case. *Physical Review D*, APS, v. 100, n. 2, p. 023533, 2019. Citado na página 86.
- JOYNER, D. *Adventures in group theory: Rubik's Cube, Merlin's machine, and other mathematical toys*. [S.l.]: JHU Press, 2008. Citado na página 37.
- KEIL, M. T.; RAFFELT, G. G.; JANKA, H.-T. Monte carlo study of supernova neutrino spectra formation. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 590, n. 2, p. 971, 2003. Citado na página 130.
- KEMP, E.; COLLABORATION, D. The deep underground neutrino experiment: the precision era of neutrino physics. *Astronomische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 338, n. 9-10, p. 993–999, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 135.
- KEMP, E. et al. Caracterização da emissão de neutrinos de colapsos estelares com o experimento Ivd. [sn], 2000. Citado 3 vezes nas páginas 119, 121 e 122.
- KHACHATRYAN, V. et al. Observation of the diphoton decay of the higgs boson and measurement of its properties. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 74, n. 10, p. 3076, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 19, 96 e 97.
- KIZILTAN, B. et al. The neutron star mass distribution. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 778, n. 1, p. 66, 2013. Citado na página 158.
- KODAMA, K. et al. Observation of tau neutrino interactions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 504, n. 3, p. 218–224, 2001. Citado na página 31.
- LADA, C. J.; LADA, E. A. Embedded clusters in molecular clouds. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 41, n. 1, p. 57–115, 2003. Citado na página 119.
- LANDAU, D. P.; BINDER, K. *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2014. Citado na página 130.
- MAGGIORE, M. *A modern introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Oxford university press, 2005. v. 12. Citado 6 vezes nas páginas 44, 45, 46, 55, 63 e 174.
- MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum field theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 94, 95 e 97.
- MARTIN, B. R.; SHAW, G. *Particle physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017. Citado na página 79.
- MINTER, A.; RETKUTE, R. Approximate bayesian computation for infectious disease modelling. *Epidemics*, Elsevier, v. 29, p. 100368, 2019. Citado na página 148.

- NADEZHIN, D.; OTROSHCHENKO, I. The spectrum of the electron neutrinos and antineutrinos associated with the process of neutron star formation. *Soviet Astronomy*, v. 24, p. 47, 1980. Citado na página 129.
- NAKAZATO, K. et al. Supernova neutrino light curves and spectra for various progenitor stars: from core collapse to proto-neutron star cooling. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 205, n. 1, p. 2, 2013. Citado na página 130.
- OKUN, L. B. *Leptons and quarks*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado na página 127.
- OLIVE, K. A. Review of particle physics. *Chinese physics C*, v. 38, n. 9, p. 090001–090001, 2014. Citado na página 102.
- ÖZEL, F. et al. On the mass distribution and birth masses of neutron stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 757, n. 1, p. 55, 2012. Citado na página 158.
- PAULI, W. The connection between spin and statistics. *Physical Review*, APS, v. 58, n. 8, p. 716, 1940. Citado na página 57.
- PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 74, 76, 99 e 174.
- PETROSIAN, V.; BEAUDET, G.; SALPETER, E. Photoneutrino energy loss rates. *Physical Review*, APS, v. 154, n. 5, p. 1445, 1967. Citado na página 126.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado na página 75.
- SALINAS, S. *Introduction to statistical physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. Citado na página 123.
- SCHAEFFER, R.; DECLAIS, Y.; JULLIAN, S. The neutrino emission of sn1987a. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 330, n. 6144, p. 142–144, 1987. Citado na página 142.
- SCHOLBERG, K. Supernova neutrino detection. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews, v. 62, p. 81–103, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 20, 31 e 138.
- SCHWABL, F. *Statistical Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. Citado na página 123.
- SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 75, 76 e 99.
- SHANKAR, R. *Principles of quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 187.
- SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 119.
- SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado na página 99.
- STOENNER, R.; SCHAEFFER, O.; KATCOFF, S. Half-lives of argon-37, argon-39, and argon-42. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 148, n. 3675, p. 1325–1328, 1965. Citado na página 139.

- STRUMIA, A.; VISSANI, F. Precise quasielastic neutrino/nucleon cross-section. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 564, n. 1-2, p. 42–54, 2003. Citado na página 139.
- SUPER-KAMIOKANDE. *Experimental Technique*. Disponível em: <<http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/detector/cherenkov-e.html>>. Citado na página 101.
- SYMMETRYMAGAZINE. *The Standard Model of Particle Physics*. 2015. Disponível em: <<https://www.symmetrymagazine.org/standard-model/>>. Citado na página 32.
- TAKAHASHI, Y. On the generalized ward identity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 6, n. 2, p. 371–375, 1957. Citado na página 82.
- TURATTO, M. Classification of supernovae. In: *Supernovae and Gamma-Ray Bursters*. [S.l.]: Springer, 2003. p. 21–36. Citado na página 119.
- TURNER, B. M.; ZANDT, T. V. A tutorial on approximate bayesian computation. *Journal of Mathematical Psychology*, Elsevier, v. 56, n. 2, p. 69–85, 2012. Citado na página 147.
- VOGEL, P.; BEACOM, J. Angular distribution of neutron inverse beta decay. *Physical Review D*, v. 60, p. 053003, 1999. Citado na página 139.
- WANG, Z.; QU, Q.-Y.; CHEN, Y. Is rx j1713. 7-3946 the remnant of the ad393 guest star? *Astronomy and Astrophysics*, v. 318, p. L59–L61, 1997. Citado na página 119.
- WARD, J. C. An identity in quantum electrodynamics. *Physical Review*, APS, v. 78, n. 2, p. 182, 1950. Citado na página 82.
- WEINBERG, S. A model of leptons. *Physical review letters*, APS, v. 19, n. 21, p. 1264, 1967. Citado na página 89.
- WIETFELDT, F. E.; GREENE, G. L. Colloquium: The neutron lifetime. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 83, n. 4, p. 1173, 2011. Citado na página 110.
- YAKOVLEV, D. et al. Neutrino emission from neutron stars. *Physics Reports*, Elsevier, v. 354, n. 1-2, p. 1–155, 2001. Citado na página 126.
- ZHAO, F.-Y.; STROM, R.; JIANG, S.-Y. The guest star of ad185 must have been a supernova. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, IOP Publishing, v. 6, n. 5, p. 635, 2006. Citado na página 119.

Apêndices

APÊNDICE A – Formalismo Lagrangeano

Como estamos interessados em teorias de campos ψ locais, nossa Lagrangiana pode ser representada em termos de uma densidade Lagrangiana

$$L = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) d^3x \quad (\text{A.1})$$

De forma que a ação S da teoria é escrita como

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) d^4x \quad (\text{A.2})$$

Queremos que o campo ψ seja aquele para o qual a variação da ação é mínima, respeitando o princípio de mínima ação. Portanto, desejamos que $\delta S = 0$, a variação da ação então deve ser escrita em termos da variação da densidade Lagrangiana

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} \delta \partial_\mu \psi_i \right] \quad (\text{A.3})$$

Ou seja, a variação da ação é escrita como

$$\delta S = \int \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} \delta \partial_\mu \psi_i \right] d^4x = 0 \quad (\text{A.4})$$

Integrando o segundo termo por partes, nas condições de contorno a variação é nula e o resultado é zero, nos fornecendo uma forma de reescrever δS como

$$\delta S = \int \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} \right] \delta \psi_i d^4x = 0 \quad (\text{A.5})$$

Como este resultado deve ser válido para qualquer variação do campo ψ_i , devemos ter que este campo satisfaz a equação de Euler-Lagrange para campos contínuos.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Assim, para um campo físico, conhecendo sua densidade Lagrangiana, comumente chamada apenas de Lagrangiana em teorias de campos, podemos determinar suas equações de dinâmica como consequência do princípio da mínima ação. Vale lembrar a importância deste princípio na física em teorias físicas além daquelas abordadas nesta tese, como a ótica e a relatividade geral, que apesar de ser uma teoria de campo clássica, não é mencionada aqui.

APÊNDICE B – Teorema de Noether

As relações entre simetrias e conservação são extremamente importantes na teoria de campos e na física como um todo. Considere uma teoria de campos com os campos ψ_i e uma ação S , se fizermos uma transformação infinitesimal nas coordenadas, parametrizadas por um parâmetro infinitesimal ε^a , com $a = 1, \dots, N$ dada de forma geral por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^a A_a^\mu \quad (\text{B.1})$$

$$\psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x') = \psi_i(x) + \varepsilon^a F_{i,a}(\psi, \partial\psi) \quad (\text{B.2})$$

onde A_a^μ e $F_{i,a}(\psi, \partial\psi)$ são conhecidos. Esta transformação será uma transformação de simetria se ela mantiver a ação $S(\psi)$ invariante. Devemos destacar a diferença entre simetrias internas e simetrias do espaço-tempo, simetrias internas não alteram as coordenadas do campo, $A_a^\mu(x) = 0$, enquanto que simetrias do espaço-tempo alteram as coordenadas. Para simetrias internas, d^4x é invariante e portanto a invariância da ação S é refletida na invariância da densidade Lagrangiana \mathcal{L} .

Vamos supor um caso geral em que os parâmetros ε^a variam vagarosamente com x , neste caso, a ação S não será invariante e sua variação δS pode ser expressa em termos de uma expansão em ε^a

$$S(\psi') = S(\psi) - \int j_a^\mu(\psi) (\partial_\mu \varepsilon^a) + O(\partial\partial\varepsilon) d^4x + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.3})$$

sendo j_a^μ o termo que acompanha a derivada de ε^a . Consideramos que ε^a se aproxima de zero no infinito, de forma que podemos integrar por partes e nos limites de integração, o resultado será zero.

$$S(\psi') = S(\psi) - \int \varepsilon^a(x) \partial_\mu j_a^\mu(\psi) d^4x + O(\partial\partial\varepsilon) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.4})$$

Até agora, este resultado é válido para qualquer ψ , mas supomos agora que ψ é uma solução da equação de Euler-Lagrange para campos, assim, ele é um extremo da ação e o termo linear em (B.4) vai a zero para qualquer ε^a que tende a zero no infinito, independente de sua dependência com x . Portanto

$$\partial_\mu j_a^\mu(\psi) = 0 \Rightarrow j_a^\mu(\psi) = \text{cte} \quad (\text{B.5})$$

as correntes j_a^μ são conservadas. Ou seja, há uma corrente conservada para cada gerador de simetria no campo. Definimos a carga de Noether Q_a como

$$Q_a = \int j_a^0(\vec{x}, t) d^3x \quad (\text{B.6})$$

Que também é uma grandeza conservada, como consequência da conservação da corrente.

Nos perguntamos agora a forma explícita de j_a^μ , isso pode ser feito variando a ação para ϵ variando também e comparando os termos proporcionais a $\partial_\mu \epsilon$ com a equação (B.3) (MAGGIORE, 2005) e (PESKIN, 2018), e obtemos o resultado para a forma explícita de j_a^μ

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} [A_a^\nu(x) \partial_\nu \psi_i - F_{i,a}(\psi, \partial \psi)] - A_a^\mu(x) \mathcal{L} \quad (\text{B.7})$$

No caso de simetrias internas, $A_a^\mu(x) = 0$

$$j_a^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} F_{i,a}. \quad (\text{B.8})$$

Definimos o tensor energia-momento do campo como

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} \partial^\nu \psi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{B.9})$$

Onde $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski. Dessa forma, a equação (B.5) é reescrita na forma

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.10})$$

E a carga associada ao tensor energia-momento é o quadrimomento P^ν

$$P^\nu = \int T^{0\nu} d^3x \quad (\text{B.11})$$

APÊNDICE C – Diagramas de Feynman para a Força Eletrofraca

Para cada fenômeno descrito por uma lagrangiana dentro da interação eletrofraca, temos um diagrama associado. A seguir, listamos como os termos aparecem na lagrangiana e os diagramas associados a estes termos com base em (GIUNTI; KIM, 2007).

Primeiramente, temos os termos que geram linhas externas nos diagramas, isto é, partículas em vem do infinito. Para isso, devemos lembrar que Ψ_f possui quatro componentes, duas descrevendo um férmion f e duas para um anti-férmion \bar{f} . Assim, se aparece o termo

$$\Psi_f. \tag{C.1}$$

Temos um diagrama que pode representar um férmion vindo do infinito ou um anti-férmion vindo do infinito

$$\xrightarrow{f \text{ ou } \bar{f}}$$

Enquanto que o termo

$$\bar{\Psi}_f, \tag{C.2}$$

representa um férmion ou anti-férmion saindo da interação para o infinito.

$$\xrightarrow{f \text{ ou } \bar{f}}$$

Os dois termos resultam em figuras iguais, porém a posição deles no diagrama é diferente.

Agora, para linhas internas na interação, como o fóton na figura 5. Estas linhas representam as partículas virtuais da interação, costumamos identifica-los pela presença do propagador da partícula, isso se torna mais fácil de ver ao reescrever a interação no espaço dos momentos ao invés do espaço usual das posições.

$$G(p) = i \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon} \tag{C.3}$$

$$\overrightarrow{f \text{ ou } \bar{f}}$$

Devemos ressaltar que novamente, mesmo esta figura sendo a mesma das últimas, está é localizada no meio da interação ao invés de antes ou depois, como nas anteriores.

$$G_{\mu\nu}^{\gamma}(p) = i \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.4})$$

$$\text{~~~~~}$$

γ

$$G_{\mu\nu}^W(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m_W^2}}{p^2 - m_W^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.5})$$

$$\text{~~~~~}$$

W^{\pm}

$$G_{\mu\nu}^Z(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m_Z^2}}{p^2 - m_Z^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.6})$$

$$\text{~~~~~}$$

Z^0

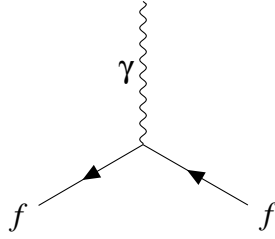
$$G_{\mu\nu}^H(p) = \frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.7})$$

$$\text{~~~~~}$$

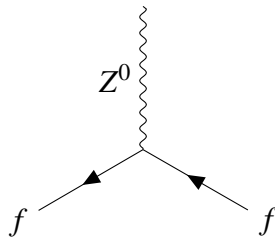
H

Por fim, vejamos os termos que geram vértices de interação nos diagramas.

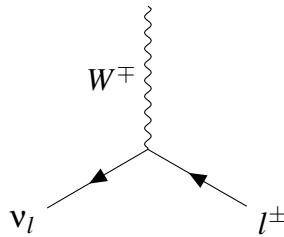
$$-ieq_f \gamma_{\mu} \quad (\text{C.8})$$



$$-i \frac{g}{2 \cos(\theta_W)} \gamma_\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) \quad (\text{C.9})$$

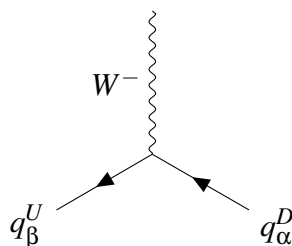


$$-i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \quad (\text{C.10})$$

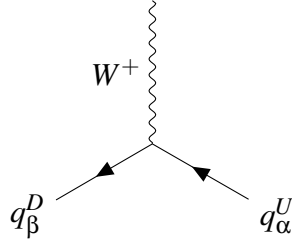


Apesar de não tratarmos especificamente das interações fracas nos quarks durante o texto, eles também participam da interação eletrofraca e portanto possuem seus vértices de interação.

$$-i \frac{g}{2 \cos(\theta_W)} \gamma_\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) V_{\alpha\beta} \quad (\text{C.11})$$

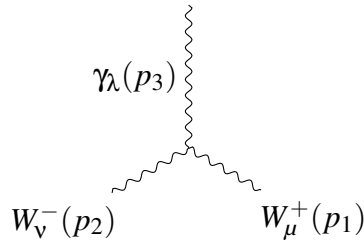


$$-i \frac{g}{2 \cos(\theta_W)} \gamma_\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma^5 \right) V_{\alpha\beta}^* \quad (\text{C.12})$$

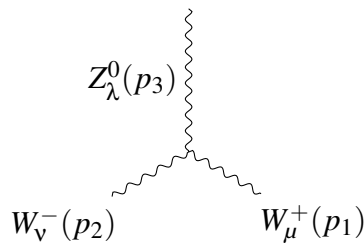


O índice U e D indica um quark da família up (u, t, c) e um quark da família down (d, b, s) respectivamente. α e β são grandezas que indicam a espécie do quark da família up ou da família down.

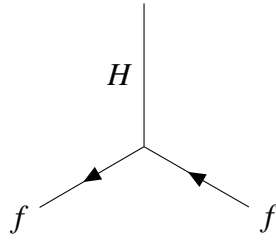
$$ie \left[(p_1 - p_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_\nu g_{\lambda\mu} \right] \quad (\text{C.13})$$



$$ig \cos(\theta_W) \left[(p_1 - p_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_\nu g_{\lambda\mu} \right] \quad (\text{C.14})$$

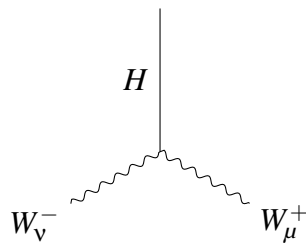


$$i \frac{gm_f}{2m_W} g_{\mu\nu} \quad (\text{C.15})$$



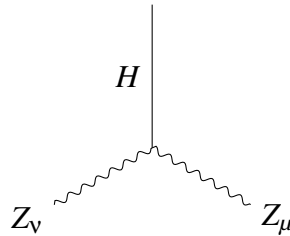
$$igm_W g_{\mu\nu}$$

(C.16)



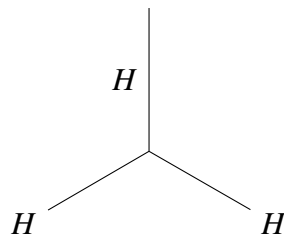
$$i \frac{gm_Z}{\cos(\theta_W)} g_{\mu\nu}$$

(C.17)



$$i \frac{3gm_H^2}{2m_W} g_{\mu\nu}$$

(C.18)

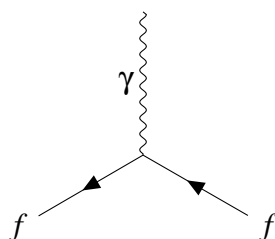


APÊNDICE D – Interação e os Diagramas de Feynman

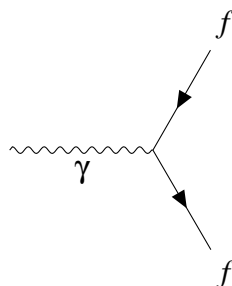
Como mostrado no capítulo 4, podemos descrever as interações entre partículas fundamentais utilizando os diagramas de Feynman. Entretanto, devemos lembrar da realidade das interações!

O observável é representado apenas pelas partículas que saem e entram no diagrama, no caso da figura 5 apenas medimos os elétrons incidentes e resultantes, o fóton trocado entre eles está totalmente fora do nosso acesso. Isso implica no fato de que realmente temos infinitas formas nas quais os elétrons podem interagir um com o outro para este espalhamento e, antes de seguir vendo estas formas e como cada uma delas resulta em descrições diferentes para o mesmo fenômeno, devemos dar uma olhada no vértice fundamental da QED ¹

O vértice fundamental da QED, é dado pelo termo $-e\gamma_\mu$ na lagrangiana da teoria somado aos campos envolvidos. Este termo nos resulta no diagrama



E aqui já se inicia a discussão sobre a delicadeza dos diagramas de Feynman. No capítulo 4, mencionamos o cuidado que se deve ter com a definição da direção do tempo no diagrama. Do jeito que definimos o tempo, na direção horizontal \rightarrow , este diagrama representa um pósitron emitindo um fóton e sofrendo um recuo devido a essa emissão. Porém, se rotacionarmos este diagrama um pouco



¹ Vale lembrar também que esta discussão serve para todas as demais interações fundamentais e tratamos aqui apenas da QED por motivos de simplicidade.

podemos considerar este vértice como sendo uma criação de um par elétron-pósitron por um fóton. Aqui começamos a ver que a mesma lagrangiana descreve fenômenos diferentes, o que mudará é a forma como representamos o fenômeno e a amplitude de espalhamento calculada. A figura 41 mostra todas as formas de interpretar o vértice de interação fundamental da QED com o tempo definido na horizontal.

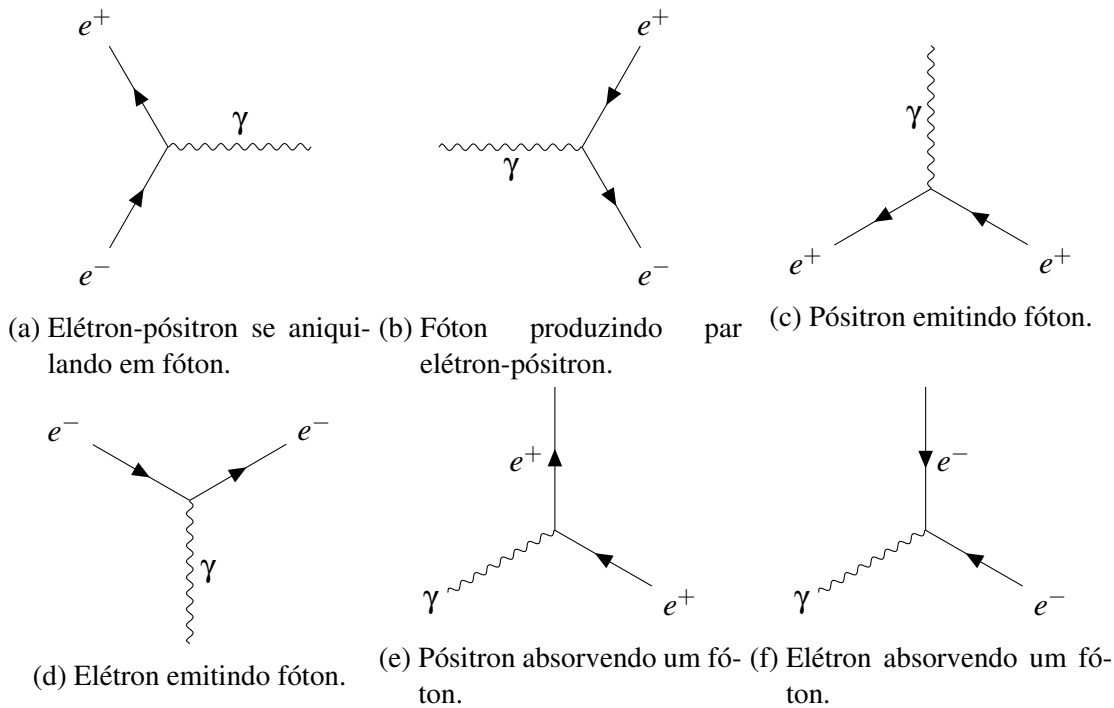
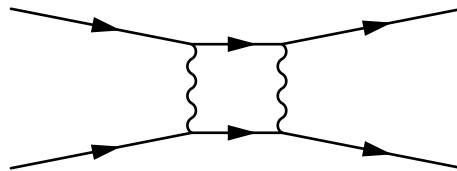


Figura 41 – Todas as interações que podem ser interpretadas do mesmo vértice fundamental da QED.

Estas são todas as formas nas quais os campos eletromagnético e do elétron podem interagir entre si. Mas como dito, a interação real não pode ser representada apenas por um único diagrama, uma vez que não sabemos o que ocorre no meio da interação. Como resultado disso, devemos considerar todas as possíveis formas de interação que as partículas podem ter. Por exemplo, no espalhamento elétron-elétron, podemos considerar também o cenário em que os elétrons trocam dois fótons entre si, ao invés de um



ou o cenário em que o fóton se converte em um par elétron-pósitron rapidamente que se aniquilam logo em seguida novamente no fóton.

Todos estes diagramas fazem parte da mesma interação e devem ser levados em conta, já que a interação total é definida apenas pelas partículas que entram e as que saem. Estas

partículas obedecem a relação de massa e energia de Einstein e são chamadas de partículas *on shell*, enquanto que as partículas geradas no meio a interação são chamadas de partículas virtuais e não necessariamente obedecem a relação de massa e energia de Einstein, as chamadas *off shell* (Figura 42). A realidade física das partículas virtuais é um questionamento ainda aberto na física.

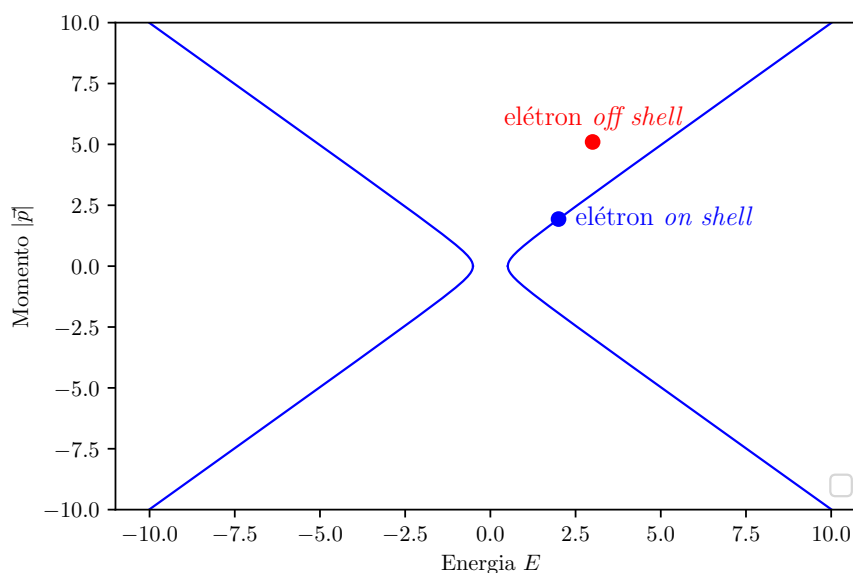


Figura 42 – Relação de Einstein para uma dada massa específica m_e . A curva azul representa as partículas que podem existir e possuem momento e energia obedecendo à relação de Einstein.

A interação total é representada pela soma de todas as possíveis canais de interação que podem ocorrer e resultam nas mesmas partículas de saída e entrada.

$$\mathcal{M} = \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + \dots$$

Uma vez que são infinitos canais, podemos achar que a probabilidade de interação total dê infinito, porém, a probabilidade cai conforme adicionamos vértices no diagrama de forma que a probabilidade total ainda seja um número finito. Por isso comumente representamos uma interação pelo termo dominante, ou seja, o mais provável. Ocasionalmente devemos levar em consideração canais mais complexos para descrever um fenômeno, como no caso do *Bremsstrahlung* (GREINER; REINHARDT, 2008).

APÊNDICE E – Campo vetorial massivo e não-massivo

O foco principal deste trabalho é voltado para o campo de Dirac, objeto utilizado para a descrição dos neutrinos. Entretanto, para se obter um maior entendimento sobre a origem do propagador e das soluções para os bósons vetoriais γ , W^\pm e Z^0 é interessante desenvolver uma descrição mais completa do campo vetorial massivo e não-massivo. Neste apêndice, iremos trabalhar nesta descrição. O leitor mais interessado pode verificar as referências (ITZYKSON; ZUBER, 2012) e (DEHGHANI, 2009) para descrições mais detalhadas e profundas sobre a quantização do campo vetorial massivo.

Iniciamos com a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F^2, \quad (\text{E.1})$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e A_μ é o campo vetorial em questão. Se desejamos realizar a quantização deste campo, assim como fizemos para o campo de Dirac, precisamos primeiro encontrar o momento conjugado π^μ ao campo A_μ .

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_0 A_\mu)} F^{\rho\sigma} + \partial_\rho A_\sigma \left(\frac{\partial(\partial^\rho A^\sigma)}{\partial(\partial_0 A_\mu)} - \frac{\partial(\partial^\sigma A^\rho)}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\delta_\rho^0 \delta_\sigma^\mu F^{\rho\sigma} + \partial_\rho A_\sigma (\delta^{\rho 0} \delta^{\sigma\mu} - \delta^{\sigma 0} \delta^{\rho\mu}) \right] = -\frac{1}{2} (F^{0\mu} + \partial^{0\mu} - \partial^\mu A^0) = -F^{0\mu} = F^{\mu 0} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Aqui nós já nos deparamos com um problema ao utilizar o campo A_μ para seguir com a quantização, $\pi^0 = F^{00} = 0$, isso faz com que o comutador entre A^0 e π^0 seja zero, o que não pode ser aceito para o desenvolvimento da teoria, como é dado pelas próprias regras de quantização usuais. A quantização do campo vetorial massivo é particular, uma vez que temos que lidar com a liberdade de calibre em A_μ . Para lidar com isso, modificamos a lagrangiana (E.1) introduzindo uma constante arbitrária juntamente ao termo que represente a liberdade de calibre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2. \quad (\text{E.3})$$

Com esta modificação, as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu(\partial \cdot A) = 0, \quad (\text{E.4})$$

e o momento conjugado das 4 componentes de A fica

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\rho)} = F^{\rho 0} - \lambda g^{\rho 0}(\partial \cdot A). \quad (\text{E.5})$$

Agora vemos que π^0 não é mais nulo. Um resultado interessante é visto se tomarmos a divergência da equação de Maxwell modificada

$$\begin{aligned} \partial^\mu [\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu(\partial \cdot A)] &= 0 = \\ &= \square(\partial^\mu A_\mu) - \square(\partial \cdot A) + \lambda \square(\partial \cdot A) \Rightarrow \lambda \square(\partial \cdot A) = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

se $\lambda \neq 0$, temos que $\square(\partial \cdot A) = 0$. $(\partial \cdot A)$ pode ser interpretado como um campo escalar de massa nula, na teoria clássica, podemos escolher o calibre de Lorenz, que torna $(\partial \cdot A)$ nulo em todo o espaço. Veremos agora como este campo modificado se comporta ao ser quantizado. Para fins práticos, utilizaremos $\lambda = 1$, chamado de calibre de Feynman (Caracterizado como abuso de linguagem por (ITZYKSON; ZUBER, 2012)). Assumimos agora as relações de comutação canônicas dadas pelo comutador (ao contrário do anticomutador para os férmions descritos pelo campo de Dirac)

$$[A_\rho(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{y})] = i g_\rho^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{E.7})$$

onde o termo g_ρ^μ é introduzido para se manter a covariância na equação. Os demais comutadores são dados da seguinte forma

$$[A_\rho(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{y})] = [A_\rho(t, \vec{x}), \dot{A}_\nu(t, \vec{y})] = 0 \quad (\text{E.8})$$

$$[\dot{A}_\rho(t, \vec{x}), \dot{A}_\nu(t, \vec{y})] = 0 \quad (\text{E.9})$$

$$[\dot{A}_\rho(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{y})] = i g_{\rho\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{E.10})$$

Notamos aqui que o comutador (E.10) possui a componente temporal com sinal inverso, devido a esta sutil diferença, o espaço de Hilbert gerado por A_μ é totalmente diferente do usual descrito para a mecânica quântica de Schrodinger, uma equação de campo escalar onde a comutação $[\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}(t, \vec{y})] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ só possui sinal positivo para as 3 componentes do campo escalar ϕ .

Este fato curioso não nos é interessante no momento pelo seu excesso de matematis-
cismo, seguindo adiante com a nossa quantização, o próximo passo é expandir o campo A_μ em
termos dos modos normais e os operadores a e a^\dagger com a transformada de Fourier.

$$A_\mu(x) = \int \sum_{\lambda=0}^3 \left[a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x} \right] \frac{d^3 k}{2k_0 (2\pi)^3}, \quad (\text{E.11})$$

onde $k_0 = |\vec{k}|$ e a integral é feita sobre os momentos k positivos dentro do cone de luz. Os
quadri-vetores $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ são linearmente independentes e reais. Estes vetores são justamente os
vetores de polarização, porém, algo errado não está certo, uma vez que temos 2 vetores de
polarização a mais do que o que conhecemos introduzidos pelo eletromagnetismo de Maxwell.
Ainda mais, se construirmos o estado de vácuo e tentarmos calcular as normalizações de um
vetor no espaço de Fock dessa forma, veremos que a norma é indefinida, o que não faz o menor
sentido (ITZYKSON; ZUBER, 2012).

Para atingirmos nosso objetivo, vamos selecionar os estados $|\psi\rangle$ onde a condição de
Lorentz $\partial \cdot A = 0$ seja verdade na média, este argumento pode ser justificado se o leitor pensar a
respeito do teorema de Ernfest e a equivalência entre a média de operadores quânticos com os
observáveis na mecânica clássica, descrito em (SHANKAR, 2012).

$$\langle \psi | \partial \cdot A | \psi \rangle = 0. \quad (\text{E.12})$$

Para que o nosso espaço de Hilbert tenha sentido físico, impomos a condição de que a
aniquilação de $\partial \cdot A$ resulta em

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\psi\rangle = 0. \quad (\text{E.13})$$

Analisando os estados do espaço de Hilbert, podemos construir uma base obtida de
produtos de a^\dagger atuando no vácuo, o que nos resulta

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle |\phi\rangle \quad (\text{E.14})$$

onde $|\psi_T\rangle$ é composto apenas por fótons de polarização transversal e $|\phi\rangle$ de fótons com pola-
rização longitudinal. Além disso, vemos que a condição (E.13) nos resulta em um diminuição
nos vetores de polarização envolvidos em $\partial \cdot A$. Usualmente, escolhemos $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ de forma que os
vetores de polarização sobreviventes sejam $\epsilon^{(0)}$ e $\epsilon^{(3)}$.

O próximo passo em nosso processo de quantização é verificar que os vetores no espaço de Hilbert possuem norma positiva. Para isso, escrevemos $|\phi\rangle$ como uma combinação linear dos estados $0, 1, 2, \dots$

$$|\phi\rangle = C_0 |\phi_0\rangle + C_1 |\phi_1\rangle + \dots, \quad (\text{E.15})$$

onde $|\phi_0\rangle = |0\rangle$. Nessa descrição o numero de fótons é dado por

$$N = \int (a^{(3)\dagger}(k)a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k)a^{(0)}(k)) \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3}, \quad (\text{E.16})$$

dessa forma, temos que $n \langle \phi_n \phi_n \rangle = \langle \phi_n | N | \phi_n \rangle$. Se o numero de fótons com polarização $\epsilon^{(0)}$ for igual ao numero de fótons com polarização $\epsilon^{(3)}$, podemos escrever $n \langle \phi_n \phi_n \rangle = 0$. Este resultado só é valido para $n \neq 0$, uma vez que $N |0\rangle = 0$. Podemos então generalizar $n \langle \phi_n \phi_n \rangle = \delta_{n,0}$, assim obtemos finalmente $\langle \phi_n \phi_n \rangle = |C_0|^2 \geq 0$.

O ultimo passo que nos resta para nossa quantização estar pronta é verificar que a arbitrariedade em ϕ não altera os observáveis físicos. Vamos considerar a energia, dada pela Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \int : \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} : d^3x = \int : \sum_{i=1}^3 (\dot{A}_j^2 + (\nabla A_i)^2) - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 : \frac{d^3x}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int : \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \nabla A^\mu \nabla A_\mu : d^3x, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

e utilizamos a expressão de A_μ em termos dos modos normais para escrever a Hamiltoniana como

$$H = -\frac{1}{2} \iint \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon^{(\lambda)}(k) \epsilon^{(\lambda')}(k') (\omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}') : \left(a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda')}(k') e^{-i(k+k')x} + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda')\dagger}(k') e^{i(k'-k)x} + \right. \quad (\text{E.18})$$

$$\left. + a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda')}(k') e^{i(k-k')x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda')\dagger}(k') e^{-i(k+k')x} \right) : \frac{d^3x d^3k d^3k'}{4k_0 k'_0 (2\pi)^6}.$$

Avaliando a integral em x , obtemos como resultado

$$\begin{aligned}
H = & -\frac{1}{2} \int \sum_{\lambda\lambda'}^3 \varepsilon^{(\lambda)}(k) \varepsilon^{(\lambda')}(k') (\omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}') (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') : \left(a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda')}(k') e^{i(k_0+k'_0)x^0} + \right. \\
& \left. + a^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda')\dagger}(k') e^{-i(k'_0-k_0)x^0} \right) : + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') : \left(a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda')}(k') e^{i(k_0-k'_0)x^0} + \right. \\
& \left. + a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda')\dagger}(k') e^{-i(k_0+k'_0)x^0} \right) : \frac{d^3k d^3k'}{4k_0 k'_0 (2\pi)^6},
\end{aligned} \tag{E.19}$$

prossequindo com a integração, a integral dos deltas nos resulta

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} \int g^{\lambda\lambda'} (2\omega_k) (a^{(\lambda')\dagger} a^{(\lambda)} + a^{(\lambda)\dagger} a^{(\lambda')}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4\omega_k^2} = \\
= & \int \omega_k \left(\sum_{\lambda=1}^3 a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right) \frac{d^3k}{2k_0 (2\pi)^3}.
\end{aligned} \tag{E.20}$$

Por fim, atuamos H em um estado do espaço de Hilbert e pegamos a média normalizada

$$\frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\langle \Psi_T | \int \omega_k \sum_{\lambda=1,2} a^{(\lambda)\dagger}(k) a^{(\lambda)}(k) d^3k / 2k_0 (2\pi)^3 | \Psi_T \rangle}{\langle \Psi_T \rangle}, \tag{E.21}$$

onde, tomamos proveito de $\langle \phi | a^{(0)\dagger} a^{(0)} | \phi \rangle = \langle \phi | a^{(3)\dagger} a^{(3)} | \phi \rangle$. Vemos dessa forma que os estados de polarização $\varepsilon^{(0)}$ e $\varepsilon^{(3)}$ não contribuem para a energia medida. Esta derivação é válida para todos os outros observáveis, como o momento angular, momento, etc. Nosso processo de quantização está feito e finalmente passamos agora a construção do propagador do quanta gerado por este campo, o fóton. Em seguida, expandiremos os resultados ao campo vetorial massivo, que descreve os bósons W e Z .

O propagador é definido pelo valor médio no vácuo do produto tempo-ordenado do campo.

$$TA_\mu(x)A_\nu(y) = \theta(x^0 - y^0)A_\mu(x)A_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0)A_\nu(y)A_\mu(x), \tag{E.22}$$

onde θ é a função degrau. Utilizando a expansão do campo A_μ dada por (E.7) e fazendo uso das regras de comutação entre os operadores a e a^\dagger , obtemos

$$\langle 0 | TA_\mu(x)A_\nu(y) | 0 \rangle = ig_{\mu\nu} G_F(x-y) = -ig_{\mu\nu} \int \frac{e^{-ik \cdot (x-y)} d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^4}. \tag{E.23}$$

Em termos da coordenada espacial x , podemos reescrever o propagador como

$$G_F(x) = - \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \frac{1}{4i\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} \quad (\text{E.24})$$

Vejamos agora como a presença da massa altera nossos resultados. Classicamente, partículas de spin 1 massivas são descritas pela equação de Proca

$$\partial_\rho F^{\rho\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad (\text{E.25})$$

tomando o divergente desta equação, encontramos a relação $m^2 \partial \cdot A = 0$. Se $m \neq 0$, obtemos a mesma relação dada pelas equações clássicas de Maxwell para o campo vetorial não massivo. A Lagrangiana que nos dá a equação de Proca é similar à Lagrangiana de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{2} m^2 A^2, \quad (\text{E.26})$$

Após o processo usual de quantização, o campo A_ρ assume a forma

$$A_\rho(x) = \int \frac{1}{2k_0(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2,3} \left(a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\rho^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \epsilon^{(\lambda)*}_\rho(k) e^{ik \cdot x} \right) d^4k, \quad (\text{E.27})$$

e $[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} 2k^0 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$. O vetor de polarização agora possui 3 componentes ortogonais, à condição $\partial \cdot A = 0$ faz uma das componentes ser nula. Assumindo esse vetor como real, obtemos as relações

$$\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\text{E.28})$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\rho^{(\lambda)}(k) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(k) = - \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{m^2} \right). \quad (\text{E.29})$$

A construção do propagador, similarmente ao caso não-massivo nos retorna como resultado

$$\langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = -i \int e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} - \frac{2i}{m^2} \delta_{\rho 0} \delta_{\nu 0} \delta^4(x-y) \quad (\text{E.30})$$

A descrição do campo vetorial massivo está completa dessa forma, se ninguém pensar em o que fazer no caso em que $m \rightarrow 0$. Nesse caso, singularidades irão aparecer. Isso se

deve ao fato de não considerarmos a liberdade de calibre na Lagrangiana de Proca, caso nos preocupemos com este problema, deveremos reformular a quantização incluindo um termo do tipo $-1/2\lambda(\partial \cdot A)^2$ na Lagrangiana. Porém, para os fins descritivos deste apêndice, isso não é necessário, uma vez que estamos interessados apenas no caso em que sabemos que m não tende a 0, pois a massa dos bósons W e Z são suficientemente altas. Novamente, ressaltamos que o leitor mais interessado deve procurar se aprofundar mais no tema pela leitura das referências mencionadas no início deste apêndice.

APÊNDICE F – Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) é um teste estatístico utilizado para se comparar a similaridade de distribuições de probabilidade com relação a uma distribuição de referência, como uma distribuição gaussiana, ou uma outra distribuição arbitrária.

Para realizar esta comparação, o teste KS utiliza a distância entre as duas distribuições cumulativas das quais se deseja comparar como métrica de similaridade. O teste utiliza como hipótese nula, a suposição de que a distribuição de comparação foi retirada da distribuição de referência, ou seja, a distância entre as duas distribuições cumulativas deve ser próxima de 0.

A métrica de resultado do teste, retorna o maior valor obtido pela distância da distribuição cumulativa da referência $F(x)$ e da distribuição de comparação $F_n(x)$ com n medidas independentes. Esta métrica é denominada, estatística KS

$$D_n = \max|F_n(x) - F(x)|, \quad (\text{F.1})$$

onde \max indica o valor máximo obtido pelas distâncias (Figura 43).

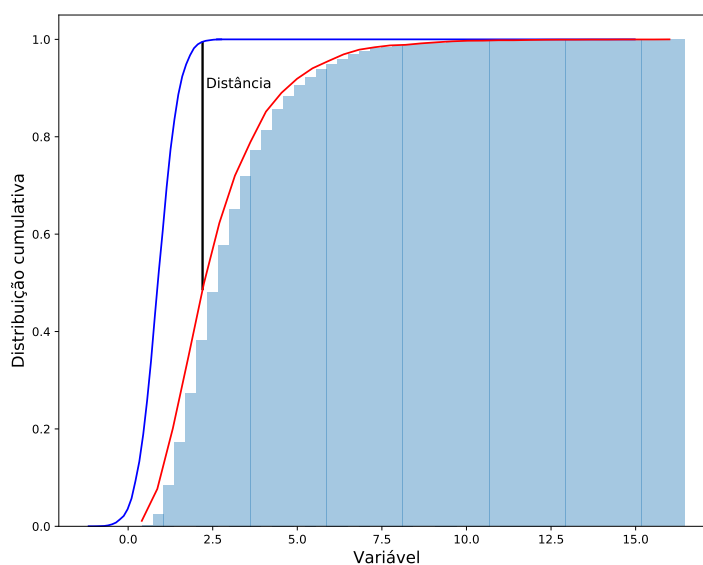


Figura 43 – Distribuições cumulativas a serem comparadas pelo teste KS. O teste utiliza o maior valor de distância entre as distribuições como métrica de similaridade entre as duas.

Caso a hipótese nula seja verdadeira, D_n tenderá a 0 conforme n tende a infinito. A significância estatística deste teste pode ser averiguada comparando o valor da estatística KS e o número de variáveis observadas na distribuição, $\sqrt{n}D_n$, com o valor crítico da distribuição de Kolmogorov.

A distribuição de Kolmogorov, para uma variável aleatória, é dada pelo valor máximo de uma ponte browniana¹. A distribuição cumulativa para a distribuição de Kolmogorov é dada, em termos de um valor crítico x por

$$P(K \leq x) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 x^2}. \quad (\text{F.2})$$

Portanto, dizemos que o resultado do teste KS tem significância estatística α , se

$$\sqrt{n}D_n > K_\alpha, \quad (\text{F.3})$$

onde K_α é dado em termos da distribuição de Kolmogorov para um dado valor α , tal que

$$P(K \leq K_\alpha) = 1 - \alpha. \quad (\text{F.4})$$

Para que as coisas estejam melhor fixadas, supomos uma significância padrão de $\alpha = 0.05$. Nesse caso, $P(K \leq K_\alpha) = 0.05$, o que nos retorna $K_\alpha = 0.5196$. Portanto, uma distribuição de comparação que obtiver uma estatística KS maior que 0.5196, possui uma significância de 95%. O valor específico de distância entre as distribuições cumulativas para que essa significância seja atingida depende do número n de amostras na distribuição.

¹ Ponte browniana é o nome dado a um movimento browniano em duas coordenadas, que tem início de fim na mesma coordenada y .

Anexos

ANEXO A – Código utilizado na simulação

```

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import simps
from scipy.special import gamma
from scipy import stats
from random import choices
import seaborn as sns
from scipy.optimize import curve_fit
from sklearn.metrics import r2_score

E = np.linspace(0.001, 100, 1000)

def spec(E, T, eta):
    fermi3 = 1
    Etot = 1e53
    A = Etot/((T**4)*fermi3)
    k = 9.617e-2
    return A*((E**2)/(1 + np.exp(E/(k*T)-eta)))

tot = simps(spec(E, 20, 12), E)
print('Total_number_of_neutrinos_emitted:', tot)

plt.figure(figsize=(10,8), dpi = 300)
plt.plot(E, spec(E, 20, 12), color = 'blue',
         label = 'Espectro_emitido')
plt.xlabel(r'Energia_(MeV)', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'$\frac{dN}{dE}$', rotation = 0,
         labelpad = 16,

```

```

fontsize = 18)
plt.xlim(0, 60)

def sigmaNC(E, th, g1, g2):
    m_e = 0.511
    sigma_0 = 88.06e-46
    Tmax = (2*E**2)/(m_e + 2*E)
    return (sigma_0/m_e)*((g1**2 + g2**2)*(Tmax-th)-
        (g2**2 + g1*g2*(m_e/(2*E)))*((Tmax**2 - th**2)/E) +
        ((g2**2)/3)*((Tmax**3 - th**3)/E))

def sigmaCCAr(E):
    a = 1e-38
    coef = [-2.29475852e-17, 9.60641343e-15, -1.63301503e-12,
        1.44776872e-10,
        -7.07396347e-09, 1.75257241e-07, -9.65078269e-07, -1.04504407e-05,
        2.20071593e-04, -9.08745120e-04]
    p = a*np.poly1d(coef)
    return p(E)

def efficiency(E, a, b): #Detector efficiency
    return 1/(1+np.exp(-a*(E-b)))

def detec(E, T, eta):
    Nt = 1e36 #Number of target particles in the detector
    d = 50000*(3.09e16) #Distance from supernova to the detector
    D = Nt/(4*np.pi*d**2)
    return spec(E, T, eta)*(sigma(E, 0, 1/2, 1/2)+sigmaCCAr(E))*
        efficiency(E, 0.976, 1.265)*D

s0 = simps(detec(E, 20, 12), E)
print('Expected_events_in_the_detector_=_%3.f' % s0)

```

```
E_mean = simpes(E*detec(E, 20, 12), E)/simpes(detec(E, 20, 12), E)
print(f'Mean_energy:_{E_mean}_MeV')
```

```
plt.figure(figsize=(10,8), dpi = 300)
plt.grid(True, which = 'both', alpha = 0.5)
plt.plot(E, detec(E, 20, 12)/s0, color = 'green',
         label = 'Espectro_esperado')
plt.plot(E, spec(E, 20, 12)/tot, color = 'blue',
         label = 'Espectro_emitido')
plt.xlabel(r'Energia', fontsize = 14)
plt.ylabel(r' $\frac{dN}{dE}$ ', rotation = 0, labelpad = 16,
         fontsize = 18)
#plt.yscale('log')
plt.title('Espectros_de_neutrinos', fontsize = 18)
plt.legend(fontsize = 12)
```

```
poiss = np.random.poisson(s0, 1000)
count, bins, ignored = plt.hist(poiss, 100, density=True)
plt.show()
print('Number_chosen=_%3.f' % poiss[0])
```

```
#Lets make it our reference for all future analysis
ref = poiss[0]
```

```
ref_samples = []
population = E
weights = detec(E, 20, 12)
ref_samples = choices(population, weights, k = ref)
```

```
plt.figure(figsize=(10,8), dpi = 300)
plt.hist(ref_samples, bins = 40, color = 'blue', alpha = 0.6,
         label = 'Neutrinos_sorteados')
plt.plot(E, detec(E, 20, 12), color = 'darkgreen',
         label = 'Espectro_esperado')
plt.xlabel(r'Energia', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'Frequência', fontsize = 14)
```

```
plt.suptitle('Neutrinos_sorteados_do_espectro_esperado', fontsize = 18)
plt.title('Com_base_na_distribuição_de_Poisson', fontsize = 14)
plt.legend(fontsize=12)
```

```
new_sample = []
for i in range(len(ref_samples)):
    value = np.random.normal(ref_samples[i],
                             scale=0.05*np.asarray(ref_samples[i]))
    new_sample.append(value)
```

```
plt.figure(figsize = (10,8), dpi = 300)
plt.hist(new_sample, bins = 40, density = True, color = 'blue',
         alpha = 0.6, label = 'Neutrinos_sorteados_após_flutuação')
plt.plot(E, detec(E, 20, 12)/ref, color = 'darkgreen',
         label = 'Espectro_esperado')
plt.xlabel(r'Energia', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'pdf', fontsize = 14)
plt.suptitle(r'Neutrinos_sorteados_após_flutuação_da_energia
             e_espectro_esperado', fontsize = 18)
plt.title(r'Normalizados', fontsize = 14)
plt.legend(fontsize = 12)
```

```
prior_params = np.array([[0,40],[0,20]], dtype=np.float64)
Dados, E2 = np.histogram(new_sample, bins = 40, density = True)
E2 = (E2[:-1]+E2[1:])/2
```

```
def rejABC(prior_params, eps, n_sample):
    # prior_params: list of ranges for uniform priors;
    # eps: tolerance;
    # n_sample: number of samples to be sorted

    n_mp = len(prior_params) # Number of model parameters to be fit

    p = np.zeros(n_mp+1, dtype=np.float64) # Array of parameters
```

```

post = np.zeros((1,n_mp+1)) # Array to build posterior distribution

for i in range(n_sample):

    # Sort parameters according to given priors
    for j in range(n_mp):

        p[j] = np.random.uniform(prior_params[j,0],
                                prior_params[j,1])

        d = np.sqrt(np.sum((Datos-detec(E2, *p[:-1])/ref)**2))/len(E2)
        p[-1] = d # Model-data distance

        # Check parameters and add sample to posterior distribution
        if (d < eps):

            post = np.concatenate((post, p.reshape((1,n_mp+1)))).
                reshape(len(post)+1, n_mp+1)

    return post[1:]

post = rejABC(prior_params, 0.001, 1000000)

def sort(n, hist, bins):
    # n: how many numbers to sort;
    # hist: l-sized array with height of columns of normalized
    # histogram;
    # bins: (l+1)-sized array with values of bins divisions

    d = bins[1] - bins[0] # Bin size

    dat = [] # List of sorted random numbers

    for i in range(n):

        x = np.random.uniform(0., 1.)

        # Conversion of 0-1 random number to number sorted according

```



```

#to the given histogram
for j in range(len(hist)):

    if (x < np.sum(hist[:j+1])*d):

        dat.append(np.random.uniform(bins[j], bins[j+1]))
        break

return np.array(dat)

def smcABC(model, hist, bins, n_bins, p_std, eps, n_sample, n_max):

    n_mp = len(hist) # Number of model parameters to be fit

    p = np.zeros(n_mp+1, dtype=np.float64) # Array of parameters

    post = np.zeros((1,n_mp+1)) # Array to build posterior distribution

    for i in range(n_sample):

        # Sort parameters according to given priors
        for j in range(n_mp):

            # p[j] = np.random.uniform(prior_params[j,0],
                prior_params[j,1])
            p[j] = sort(1, hist[j], bins[j]) +
                np.random.normal(scale=p_std[j]/n_bins)

        d = np.sqrt(np.sum((Dados-detec(E2, *p[:-1])/ref)**2))/len(E2)
        p[-1] = d # Model-data distance

        # Check parameters and add sample to posterior distribution
        if (d < eps):

            post = np.concatenate((post, p.reshape((1,n_mp+1))))
                reshape(len(post)+1, n_mp+1)

        if (len(post) > n_max):
            break

```

```

    return post[1:]

n_bins = 40

repeat = 10

for l in range(1, repeat):
    p = post[np.where(post[:, -1] == np.min(post[:, -1]))[0][0]][:-1]
    p_std = np.std(post[:, :-1], axis=0)

    hist = np.zeros((len(p), n_bins))
    bins = np.zeros((len(p), n_bins+1))

    # Define new priors
    for k in range(len(hist)):
        hist[k], bins[k] = np.histogram(post[:, k], n_bins,
                                       density=True)
    eps = (np.max(post[:, -1]) + np.min(post[:, -1]))/2
    post_ = smcABC(detec(E2, *p), hist, bins, n_bins, p_std,
                  eps, 100000, 10000)

p = post_[np.where(post_[:, -1] == np.min(post_[:, -1]))[0][0]][:-1]
p_std = np.std(post_[:, :-1], axis=0)

T = post_[:, 0]
eta = post_[:, 1]

print( 'Valor_para_T:_%3.2f' % p[0], '95%_CDI: ',
        np.percentile(T, 2.5), '-', np.percentile(T, 97.5))
print( 'Valor_para_eta:_%3.2f' % p[1], '95%_CDI: ',
        np.percentile(eta, 2.5), '-', np.percentile(eta, 97.5))

sns.distplot(post_[:, 0])

```

```

sns.distplot(post_[:,1])

ax = sns.jointplot(*post_[:, :2].T, kind = 'kde')
ax.set_axis_labels('T', '$\eta$')

plt.figure(figsize=(10,8), dpi = 300)
cs = plt.hexbin(T, eta, C=post_[:,2], gridsize=50,
                cmap=plt.cm.jet, bins=None)
plt.colorbar(cs, label = 'Distance')
plt.scatter(20, 12, color = 'orange', label = 'Valores_reais')
plt.scatter(p[0], p[1], color = 'magenta',
            label = 'Valores_encontrados')
plt.xlabel('T', fontsize = 14)
plt.ylabel('$\eta$', fontsize = 14)
plt.title('Distribuição_de_parâmetros_encontrados', fontsize = 18)
plt.legend(loc = 'upper_left', fontsize = 14)

KS = []
pvalue = []

for i in range(len(post_)):
    T0 = post_[i,0]
    eta0 = post_[i,1]
    K = stats.ks_2samp(detec(E2, T0, eta0)/ref, Dados)
    KS.append(K[0])
    pvalue.append(K[1])

plt.figure(figsize=(10,8))
#plt.rc('text', usetex = True)
#plt.rc('font', family = 'serif')
cs = plt.hexbin(T, eta, C=pvalue, gridsize=50,
                cmap=plt.cm.jet, bins=None)
plt.colorbar(cs, label = 'p-value')
plt.scatter(20, 12, color = 'black', label = 'Valores_reais')
plt.scatter(p[0], p[1], color = 'blue', label = 'Valores_ABCSMC')

```

```

plt.xlabel('T', fontsize = 12)
plt.ylabel('eta', fontsize = 12)
#plt.xlim(46, 54)
#plt.ylim(4.8, 5.4)
plt.title('Parâmetros_T_e_eta_para_a_supernova', fontsize = 14)
plt.legend(loc = 'upper_right', fontsize = 12)

T_best = p[0]
eta_best = p[1]

def detec2(E, d):
    Nt = 1e36 #Number of target particles in the detector
    D = Nt/(4*np.pi*(d*(3.09e16))**2)
    return spec(E, T_best, eta_best)*(sigma(E, 0, 1/2, 1/2)+
        sigmaCCAr(E))*efficiency(E, 0.976, 1.265)*D

prior = np.array([[40000,60000]], dtype=np.float64)

def rejABC2(prior_params, eps, n_sample):

    n_mp = len(prior_params) # Number of model parameters to be fit

    p = np.zeros(n_mp+1, dtype=np.float64) # Array of parameters

    post = np.zeros((1,n_mp+1))

    for i in range(n_sample):

        # Sort parameters according to given priors
        for j in range(n_mp):

            p[j] = np.random.uniform(prior_params[j,0],
                prior_params[j,1])

        d = np. abs(ref - simps(detec2(E, *p[:-1]), E))
        p[-1] = d # Model-data distance

```

```

# Check parameters and add sample to posterior distribution
if (d < eps):

```

```

    post = np.concatenate((post, p.reshape((1, n_mp+1)))).
        reshape(len(post)+1, n_mp+1)

```

```

return post[1:]

```

```

D = rejABC2(prior, 500, 1000000)

```

```

sns.distplot(D[:,0])

```

```

def smcABC(model, hist, bins, n_bins, p_std, eps, n_sample, n_max):

```

```

    n_mp = len(hist) # Number of model parameters to be fit

```

```

    p = np.zeros(n_mp+1, dtype=np.float64) # Array of parameters

```

```

    post = np.zeros((1, n_mp+1)) # Array to build posterior distribution

```

```

for i in range(n_sample):

```

```

    # Sort parameters according to given priors

```

```

    for j in range(n_mp):

```

```

        p[j] = sort(1, hist[j], bins[j]) +
            np.random.normal(scale=p_std[j]/n_bins)

```

```

    d = np.abs(ref - simps(detec2(E, p[:-1]), E))

```

```

    p[-1] = d # Model-data distance

```

```

# Check parameters and add sample to posterior distribution

```

```

if (d < eps):

```

```

    post = np.concatenate((post, p.reshape((1, n_mp+1)))).
        reshape(len(post)+1, n_mp+1)

```

```

        if (len(post) > n_max):
            break

    return post[1:]

n_bins = 40

repeat = 10

for l in range(1, repeat):
    p = D[np.where(D[:, -1] == np.min(D[:, -1]))[0][0]][: -1]
    p_std = np.std(D[:, : -1], axis=0)

    hist = np.zeros((len(p), n_bins))
    bins = np.zeros((len(p), n_bins+1))

    # Define new priors
    for k in range(len(hist)):
        hist[k], bins[k] = np.histogram(D[:, k], n_bins, density=True)
        eps = np.mean(np.max(D[:, -1]) + np.min(D[:, -1]))
        post_ = smcABC(detec2(E, p), hist, bins, n_bins, p_std,
                        eps, 1000000, 100000)

sns.distplot(post_[:,0])

d = post_[np.where(post_[:, -1] == np.min(post_[:, -1]))[0][0]][: -1]

print( 'Distância_até_a_supernova: ', d, '95%_CDI: ',
        np.percentile(post_[:,0], 2.5), '-', np.percentile(post_[:,0],
        97.5))

```